

強磁場による荷電ベクトル場不安定とカオスパターン

I 保存系

高 橋 光 一

強磁場中の荷電ベクトル場は、摂動論的な真空の不安定の原因となり、最低エネルギー状態として弦状の場の静的配位が提案されている。本論では、不安定モードの保存力学系を数値的に調べ、時系列とその周波数スペクトル、Poincaré 断面の形状とそのフラクタル次元、局所的リヤプノフ指数から、その運動は（準）周期的か、カオス的で興味深いフラクタル構造を持つことを示す。

1. 序論

我々の宇宙（宇＝空間，宙＝時間）は、約 138 億年前に誕生した直後に急激に膨張し—インフレーション宇宙の時代—、引き続き真空のエネルギーの解放により生成された熱い放射と物質で満たされ—ビッグバン宇宙の時代—、膨張の速度を落としながら冷え続けて現在に至り、いま再び徐々に膨張を加速し始めている。このような宇宙の歴史の記述は、素粒子論的宇宙論の進歩と 1980 年以降の卓越した宇宙観測技術により近年驚くほどに精密化されてきた（例えば Guth, Steinhardt, 1989; 佐藤勝彦, 2008 を参照）。

素粒子論的宇宙論の観点からは、宇宙の歴史の中で次のような幾つかの特筆すべきでき事が起きたと考えられている。

でき事	経過時間	温度
1) 重力の出現	10^{-44} 秒	10^{32} K
2) 色力の出現と物質生成	10^{-36} 秒	10^{29} K
3) 弱い力と電磁気力の分化	10^{-10} 秒	10^{15} K
4) クォークの閉じこめ・核子の生成	10^{-4} 秒	10^{12} K
5) 電子と陽電子の対消滅	1 秒	10^{10} K
6) 軽い原子核の合成	3 分	10^9 K
7) 宇宙の晴れ上がり	38 万年	3,000 K

ここで、‘重力’は Newton の万有引力、‘色力’は物質の基本構成要素クォーク間にグルー

オンを介して作用する力である。1) から 5) の現象は真空の相転移と呼ばれる。

我々に馴染みの深い、光によって引き起こされる電磁気力は、宇宙が誕生して 10^{-10} 秒後に生まれた。この混沌の時期に、宇宙で最初の超強磁場が生まれた可能性がある (Savvidy 1977; Matinyan, Savvidy 1978; Vachaspati 1991; Enqvist, Olesen 1994)。例えば, Vachaspati (1991), Enqvist, Olesen (1994) によれば, 3) の相転移時に $m_w^2 \sim 10^{24}$ G (m_w は電弱理論における W 場の質量) 程度の磁場がランダムなヒッグス場の勾配によって生まれ、宇宙の膨張と共に弱められて現在観測されている銀河磁場 10^{-16} G の種になった。ところが、このような強い磁場は、スピン 1 の W 場の磁気モーメントと直接相互作用して、磁場そのものを不安定にする。以下でこの事実について説明する。

磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ と磁場 \mathbf{B} の相互作用エネルギーは、古典論によれば

$$E_\mu = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

であり、 $\boldsymbol{\mu}$ と \mathbf{B} が平行のとき、 E_μ は最小になる。相対性理論では、質量 m_0 電荷 e の素粒子は、磁気モーメントの大きさが $|\boldsymbol{\mu}| = \hbar |e| / 2m_0$ であり、また静止エネルギー $m_0 c^2$ を持つので、磁場中で静止している素粒子と磁場の全エネルギーは、その最小値が

$$E_T^c = m_0 c^2 - \frac{\hbar |e|}{2m_0} B + V \frac{B^2}{8\pi}$$

で与えられる。ここで、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったもの、 c は真空中の光速、また右辺の最後の項は磁場のエネルギー密度に系の体積 V を欠けたものである。上式は、粒子の質量が十分小さいとき負になる。この不自然な結果は、量子論を考慮すると改善され、粒子のスピンが s のとき

$$E_T^q = E_0 + V \frac{B^2}{8\pi} \tag{1a}$$

$$E_0 = \sqrt{m_0^2 c^4 - \hbar |e| (2s-1) B} \tag{1b}$$

が最低エネルギー状態のエネルギーを表す式となる。しかし、今度は、 $s \geq 1$ で磁場が十分強いと静止エネルギーが複素数になってしまう。このとき、素粒子は質量が虚数の粒子—タキオン—になったという。タキオンが生じると、それまでの真空が崩壊して新たな状態に変質する。

上に述べたように、スピン 1 以上の荷電粒子は、磁場が臨界強度を超すと摂動論的真空の不安定を引き起こすことが知られている (Tsai 1973; Skalozub 1983; Fujimoto, Fukuyama 1983; Sogut, Havare, Acikgoz 2002)。これは、粒子の磁気モーメントが磁場の長波長モードと相互作用することによって、(1b) で表されたように粒子がタキオンとなることによる。

ベクトル場では、磁場に直交する成分がタキオンになる。以下では、 $s=1$ のベクトル場に話を限る。

上に述べたような、磁場に直交する荷電ベクトル場のこの特徴は、自発的対称性の破れに基づくすべての統一理論に共通している。例えば、電弱相互作用の標準理論では、摂動論的真空で質量がある W^- ボソンが強磁場との相互作用によってタキオンのふるまうようになる (Skalozub 1983; Sogut, Havare, Acikgoz 2002; Skalozub 1985; Ambjørn, Olesen 1989)。この状況は次のようなモデルで簡単に表現できる (以後、自然単位系 $c=\hbar=1$ を用いる) :

$$S = \int dt d\mathbf{r} \left[|(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)^2 \right] \quad (2a)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0), \quad A^0 = 0 \quad (2b)$$

S は相対論的に不変な作用、 A^μ は背景 $U(1)$ ゲージ場で、たとえば (2b) のようにとって、空間の z 方向を向く磁場を表すものとする。結合定数 e は、正 (負) の電荷の場に対しては正 (負) とする。 ϕ が荷電中間子場 W_μ の不安定モード $(W_1 - iW_2)/\sqrt{2}$ を表す。 m は不安定モードの有効質量で、次のように磁場に依存する :

$$m^2 = m_0^2 - 2|e|B \quad (3)$$

この右辺の第2項は、もとのローレンツ不変なラグランジュアン中の磁気モーメント項 $ie(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)W^{*\mu}W^\nu$ を対角化することで得られたものである。また、基底状態のエネルギーの2乗は、(3) にサイクロトロン運動の零点エネルギー $|e|B$ を加えると (1b) のように与えられるのである。

スカラー (スピン 0) とスピノル (スピン 1/2) に対しては、それぞれ $E_0^2 = m_0^2 + |e|B$ と $E_0^2 = m_0^2$ となることと比べれば、スピン 1 粒子の磁気モーメントの効果は明らかである : 磁場が十分強いと粒子はタキオンになる。

後の便宜のため、不安定モードの運動方程式 (EOM) の解について簡単に復習しておく (Ruder, Wunner, Herold, Geyer 1994)。円筒座標系 (r, θ, z) で z 方向に一様な ϕ の EOM は、 t を時間として (2a), (2b) より次のように書かれる :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - ieB \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{eB}{2} r \right)^2 + m^2 \right) \phi = 0 \quad (4)$$

この式は、 B が r と t のみの関数のときには一般に正しい。この場合、磁場に対する EOM は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} + 2e^2|\phi|^2\right)B - \frac{4}{r^2} \left(ie\phi^* \frac{\partial}{\partial \theta} \phi + 2|e||\phi|^2\right) = 0 \quad (5)$$

となる。とくに、磁場が時間的・空間的に一様するとき、(4) は調和振動子の運動方程式になる。その解はよく知られていて

$$\Phi_{n,l}(r) = \frac{1}{\sqrt{n!l!}} (b^\dagger)^l (a^\dagger)^n \Phi_0 \propto e^{-il\theta} r^{|l|} e^{-|e|Br^2/4} L_n^{(|l|)}(|e|Br^2/2) \quad (6)$$

となる。ここで

$$\Phi_0 = \sqrt{\frac{|e|B}{2\pi}} e^{-|e|Br^2/4} \quad (7)$$

は基底状態関数である。また、 $L_n^{(\alpha)}(x)$ は Laguerre の多項式、 a^\dagger, b^\dagger は調和振動子モードを生成する演算子である。磁場についても、数値的には動径方向にガウスの振る舞う弦状の解が得られる。この解の角運動量の z 成分は $-l$ で、エネルギー固有値は $E_n^2 = (2n+1)|e|B + m^2$ である。これより、 B が臨界値 $m_0^2/|e|$ を超えると $E_0^2 < 0$ となり、これまで述べた、‘最低エネルギー状態’ $\Phi_{0,l}$ は制御不能な ϕ 凝縮を起こす不安定状態になるという結果を得る。

同じくタキオンモードにより真空の不安定性を引き起こす通常の Higgs スカラー場の場合と異なり、 ϕ の一様な凝縮は(4)の r^2 項のために無限のエネルギーを要する。Sokoblz (1985, 1986) と Ambjørn and Olesen (1989) は、電弱相互作用の Weinberg-Salam 理論において最初にこの問題を取り上げ、超伝導現象との類似性から、基底状態として磁場の弦が格子状に配列している状態を提案した。すでに述べたように、宇宙初期の電弱相転移で強い磁場が生まれることも指摘されており (Savvidy 1977; Matinyan, Savvidy 1978; Vachaspati 1991; Enqvist, Olesen 1994)、この問題は宇宙論と密接な関連を持つ可能性がある。

問題を少々異なった観点から見てみよう。相転移が起き、臨界磁場を超える磁場が突然生まれたとしよう。Sokoblz (1985) と Ambjørn and Olesen (1989) が考えたように、その後不安定モードは磁場弦を形成すべくゼロから成長を始めるであろう。それから何が起きるだろうか。よりエネルギーが低い状態へ向かって弦が成長を続けると同時に、磁場は、 ϕ との相互作用により初めの値から局所的に変化するであろう。このことは、不安定性の原因である負の質量 2 乗 (3) もまた B とともに変わることを意味する。(4) と (5) で定義される系は保存系であることに注意しよう。したがって、相転移時にエネルギーの高い状態から出発した系は、静的な状態に落ち着くことはなく、永遠に振動を続けるであろうことを予想させる。それはどのようなものだろうか。

臨界磁場を超える磁場が存在するとき、摂動論的真空からの場の僅かの変移が、その後ど

のような動的变化を荷電ベクトル場+強磁場系にもたすかは宇宙論的な関心を引く物理的問題である。われわれはこの問題を、EOMのパラメータをWeinberg-Salam理論のような物理的モデルが許すものに限定せずに調べてみたい。次節以降で示すように、このとき運動方程式系(4),(5)は、カオスを示す興味深い解を与えることがわかる。この系のカオスデータの博物学的整理の後にその物理学的意味について触れる。

2. 力学系の構成

古典作用(2)は ϕ の2次の項までしか含まず、既に説明したようにそれ自身で安定状態を作ることはできない。したがって、 G は正の数として、(2a)に4次の項 $-G|\phi|^4/2$ を付け加えることにする。(例えばWeinberg-Salam theory理論では、 $\theta_w(\sin^2\theta_w \approx 0.23)$ をWeinberg角として $G=e^2/(2\sin^2\theta_w) \approx 2e^2$ である。) G が大きいほど、不安定モードのポテンシャルの深さは浅くなる。すると、作用(2a)は

$$S_T = S - \int dt d\mathbf{r} G |\phi|^4 / 2 \quad (8)$$

のように変更される。これによるモデルの非線形化と前に述べた B の可変性により、解析的分析は非常に困難となるので、以後、数値計算によって解の性質を調べることにする。このとき、できるだけエネルギーの低い解を求めたい。さらに、対象の自由度を減らしたい。そのために、 ϕ に対してはノード無しの単一調和振動子モード(7)を、 B に対しては単一ガウスモードを仮定する：

$$\phi(r, t) = (m_0/|e|) f(t) \Phi_{n,l}(r) \quad (9a)$$

$$B(r, t) = (m_0^2/|e|) \left(h_0 - h(t) e^{-h_0 m_0^2 r^2 / 2} \right) \quad (9b)$$

h_0 は、 $m_0^2/|e|$ で規格化した無限遠での磁場の値である。 $m_0\sqrt{h_0/2}r \rightarrow r$, $m_0\sqrt{h_0/2}t \rightarrow t$ のように無次元変数を導入し、(9a)と(9b)を L_T に代入し、 r 積分を実行すると、 z 方向の単位長さあたりの作用として次のものを得る(無次元の一定エネルギー密度項 $h_0^2/2$ と全体に掛かる定数因子 $\pi m_0^2/2e^2 h_0$ を落とす)：

$$S_T^{(n,l)} = \int dt \left[c_0 |\dot{f}|^2 - c_0 \left(4n + 2|l| + \frac{2}{h_0} - 2 + \frac{2el}{|e|} \right) |f|^2 + \left\{ \left(2c_1 - c_2 \left(4s - \frac{2el}{|e|} \right) \right) h - c_3 h^2 \right\} |f|^2 - c_4 \frac{G}{2e^2} |f|^4 + \frac{1}{8} \dot{h}^2 - \frac{h_0}{4} h^2 \right]. \quad (10)$$

ドットは無次元の t についての微分を表す。ベクトル粒子の不安定モードを考えるので、

$s=1$ である。 $c_i (i=0\sim 4)$ は, n, l, h_0 に依存する定数で, 次のように定義される:

$$c_0 = \int_0^\infty dx e^{-x} x^{|l|} L_n^{(|l|)}(x)^2, c_1 = \int_0^\infty dx e^{-(1+h_0/2)x} x^{|l|+1} L_n^{(|l|)}(x)^2, c_2 = \int_0^\infty dx e^{-(1+h_0/2)x} x^{|l|} L_n^{(|l|)}(x)^2$$

$$c_3 = \int_0^\infty dx e^{-(1+h_0)x} x^{|l|} L_n^{(|l|)}(x)^2, c_4 = \int_0^\infty dx e^{-2x} x^{2|l|} L_n^{(|l|)}(x)^4. \quad (11)$$

磁場が臨界値より僅かに大きい $h_0=1.01$ のときの c_i の値を表 1 に示す。

表 1 $l=0$ と -1 での c_i の値 ($h_0=1.01, n=0$)

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
$l=0$	1	0.4414962	0.6644518	0.4975124	0.5
$l=-1$	1	0.5867060	0.4414962	0.2475186	0.25

(10) で $el < 0$ のとき, 2 次の項の l 依存性はなくなる。最低エネルギー状態は $n=0$ と $el \leq 0$ のときに実現するであろう。この条件の下で, (10) から変分法によって導かれる f と h の運動方程式は次のようになる:

$$\ddot{f} = \left\{ 2 - \frac{2}{h_0} + 2 \left(\frac{c_1}{c_0} - (2s + |l|) \frac{c_2}{c_0} \right) h - \frac{c_3}{c_0} h^2 \right\} f - \frac{c_4}{c_0} \frac{G}{e^2} f^3, \quad (12a)$$

$$\ddot{h} = -2h_0 h + 8(c_1 - (2 + |l|)c_2 - c_3 h) f^2. \quad (12b)$$

(12) が, われわれがこれから解こうとする力学系である。単位長さあたりの保存する ‘エネルギー’ は, $s=1$ として次式で与えられる:

$$E^{(l)} = c_0 |\dot{f}|^2 + 2c_0 \left(\frac{1}{h_0} - 1 \right) f^2 + \left\{ 2(-c_1 + (2 + |l|)c_2)h + c_3 h^2 \right\} f^2 + c_4 \frac{G}{2e^2} f^4 + \frac{1}{8} \dot{h}^2 + \frac{h_0}{4} h^2. \quad (13)$$

3. 力学系の基本的性質

力学系 (13) をベクトル $\mathbf{v} = (f, \dot{f}, h, \dot{h})$ を用い $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$ のように表したとき, ヤコビ行列は $J = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{v}$, すなわち

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 - \frac{2}{h_0} + 2 \left(\frac{c_1}{c_0} - (2s + |l|) \frac{c_2}{c_0} \right) h - \frac{c_3}{c_0} h^2 - \frac{3c_4}{c_0} \frac{G}{e^2} f^2 & 0 & 2 \left(\frac{c_1}{c_0} - (2s + |l|) \frac{c_2}{c_0} - \frac{c_3}{c_0} h \right) f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16(c_1 - (2 + |l|)c_2 - c_3 h) f & 0 & -2h_0 - 8c_3 f^2 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。 J の固有値 $\lambda_i, i=1\sim 4$ は、われわれの力学系では変数 f および h のみの関数である。保存系であるため、その和は 0 になる： $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 0$ 。一つが正の実部を持てば、負の実部を持つ固有値が必ず存在し、系の位相体積はある方向への膨張と他方向への圧縮を同時に受ける。すべての固有値が純虚数の時は、系は周期的に振動する。

位相空間の原点 $\bar{f} = \bar{f} = \bar{h} = \bar{h} = 0$ は固定点であり、 $h_0 < 1$ で安定である。他方、 $h_0 > 1$ では、ヤコビ行列の固有値は原点では $\pm\sqrt{2-2/h_0}$ と $\pm i\sqrt{2h_0}$ である。二つの実固有値は、散逸系での Lyapunov 指数に対応するもので、正符号の固有値の存在は原点が f 方向に不安定な鞍点であることによる。(12a) の G 項のために f の成長には限度があり、位相体積が保存的な膨張圧縮性を持つことから系はカオス的に振る舞う可能性がある。次節以降でこれが事実であることが示すが、運動のカオスの性質は G が小さいときに顕著になるので、われわれはとくに小さい G 、すなわち $G/e^2 = 0.2$ の場合について詳しい計算の結果を示すことにする。(Weinberg-Salam 理論の場合は $G/e^2 \approx 2$ 。)

$h_0 > 1$ に対しては、安定固定点が存在する。それは系のパラメータとともに変わり、たとえば $G/e^2 = 0.2, h_0 = 1.01, l = 0(-1)$ に対しては $(\bar{f}, \bar{h}) (\pm 4.001 (\pm 2.533), -1.581 (-0.732))$ である。また、そこでのエネルギー (13) は、 $-11.886 (-0.895)$ である。この固定点は、Skalozub (1985), Ambjørn, Olesen (1989) で論じられた場の弦構造に対応する。 \bar{h} が負であることは、磁場の部分的な遮蔽、すなわち $B(r=0) > B(r=\infty) > 0$ を意味する。別の言い方をすると、 f が成長する以前に存在していた磁場に比べ、弦の中心部の磁場の方が強い。これは、磁気モーメントと磁場との相互作用を表す (10) と (12) の c_2 に比例する項—有効質量が (3) のかたちの—による。

4. 数値計算

4.1. 時系列

われわれはまず、方程式 (12a) と (12b) を $h_0 = 1.01, l = 0$ および $\lambda/e^2 = 0.2$ 場合について数値的に解く。初期条件は $f = 0.1, \dot{f} = \dot{h} = \dot{h} = 0$ である。この状態のエネルギーは $E_{ini} = -0.000193$ で、真空のそれよりもわずかに低い。 f と h の時間変化を図 1 に示す。典型的な周期 $T \sim 5$ (仮に $m_0 = m_w$ (W ボソンの質量) とすると、これは $\sim 5\sqrt{2/h_0}/m_w \sim 5 \times 10^{-26}$ s に相当する) に加えて、多くのモードの不規則な混合が起きていることがわかる。

扱っている対象は保存系なのでエネルギーは計算の各段階で一定でなければいけないが、時間を離散化する数値計算では誤差のためにエネルギー値は初めの値からずれるのが一般で

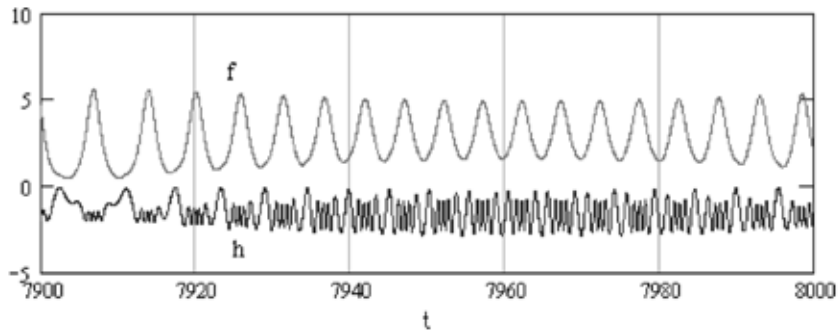


図 1 f と h の $7900 \leq t \leq 8000$ における時系列。パラメータは、 $G/e^2=0.2$, $h_0=1.01$ 。初期条件は $f=0.1$, $\dot{f}=\dot{h}=\dot{h}=0$ ($E=-0.000193$)。

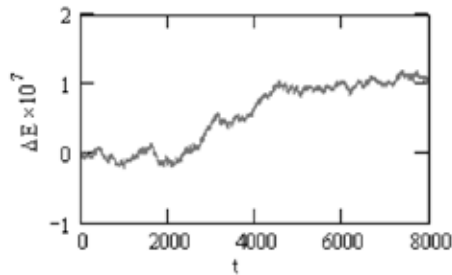


図 2 エネルギー値の E_{ini} に対する比の 1 からのずれ

ある。このずれが大きければ計算の結果は信頼できない。この研究では計算には補外法の一つである Bulirsch-Stoer 法 (Stoer, Bulirsch, 1996) を初期時間刻み幅 $8000/2^{19}=0.0153\dots$ 、精度 10^{-12} で用いた。ちなみに、Runge-Kutta 法の効率はあまり良くないようである。図 2 に、各時刻におけるエネルギー値を E_{ini} で除したのから 1 を引いた ΔE の変動のようすを示す。相対誤差は問題にしている時間にわたって 10^{-7} 程度以内に収まっていることがわかる。これは、本論文の目的のためには十分な精度である。

4.2. 周波数スペクトル

周波数スペクトルを図 3 に示す。 $\nu=1/T \sim 0.2$ 近辺の f のピークを含めて広い分布が見られ、カオスが起きていることを示唆している。

4.3. Poincaré 断面

軌道の $\dot{h}=0$ での Poincaré 断面を、時間間隔 $(0, 8000)$ でとったものを図 4(a) と 4(b) に示す。前者は $f-h$ 平面、後者は $f-\dot{f}$ 平面への射影である。また、図 4(c) と 4(d) はそれぞれ図 4(a) と 4(b) の一部分を拡大したものである。これらのパターンは、軌道がフラク

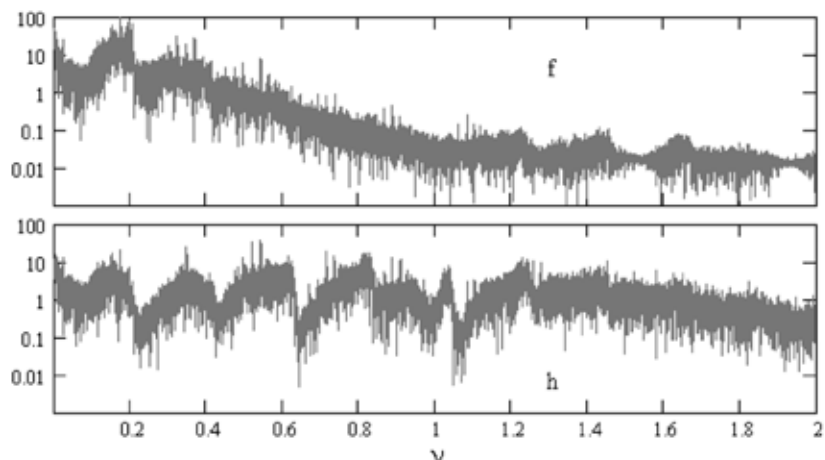


図3 f と h の周波数分布。パラメータは図1と同じ。

タル的構造を持つらしいことを示している。軌道が通過しない有限の領域が穴トーラスの断面として現われている。位相空間の代表点は、これらトーラスの間を不規則に遍歴するものと思われる。

今の場合、Poincaré 断面は $E^{(i)}|_{\dot{h}=0} = -0.000193$ で決められる、3次元ユークリッド空間中に埋め込まれた2次元面上にある。ここで $E^{(i)}$ は、もともと独立な4変数 f, \dot{f}, h, \dot{h} の関数である(13)で与えられていた。Poincaré 断面のユークリッド次元はしたがって $4-2=2$ のはずである。しかし、図4で示唆されるフラクタル的構造—点密度の非一様性—により、Poincaré 断面それ自身は2より小さいフラクタル次元 D を持つ可能性がある。それを数値的に決定するために、Poincaré 断面を構成する点の系列よりランダムに等確率で N 個の点、 $P_m, m=1, 2, \dots, N$, を選ぶ。それぞれの点の周りに半径 $\delta_j, j=1, 2, 3, 4$ の球面を描き、その内部の点の数 n_j を数える。 $\ln n_j$ を $\ln \delta_j$ に対してプロットしてできる直線の傾き D_m が点 P_m における局所次元で、 D は D_m を単純平均して得られる。この方法では、 D_m は点 P_m における点密度の重みがかかっているため、われわれはいわゆる情報次元を測定していることになる(Schuster 1988)。図4(a), (b)のPoincaré 断面は13,940点からなる。ここから160点を選んで上記の方法を適用し、 $D=1.80 \pm 0.26$ という結果を得た。結果として、Poincaré 断面は、連結な2次元面を密に埋め尽くすことはないかと予測できるであろう。Fermi-Pasta-Ulam (1955) の非エルゴード系を思い出すまでもなく、これは例外的なことではない。加えて、われわれのPoincaré 断面は、図4(c)と(d)が示すように全体的にはフラクタル図形と考えてよいだろう。ただし、計算時間を十分長く取れば、連結な2次元面を密に埋め尽くす可能性を完全には排除できない。

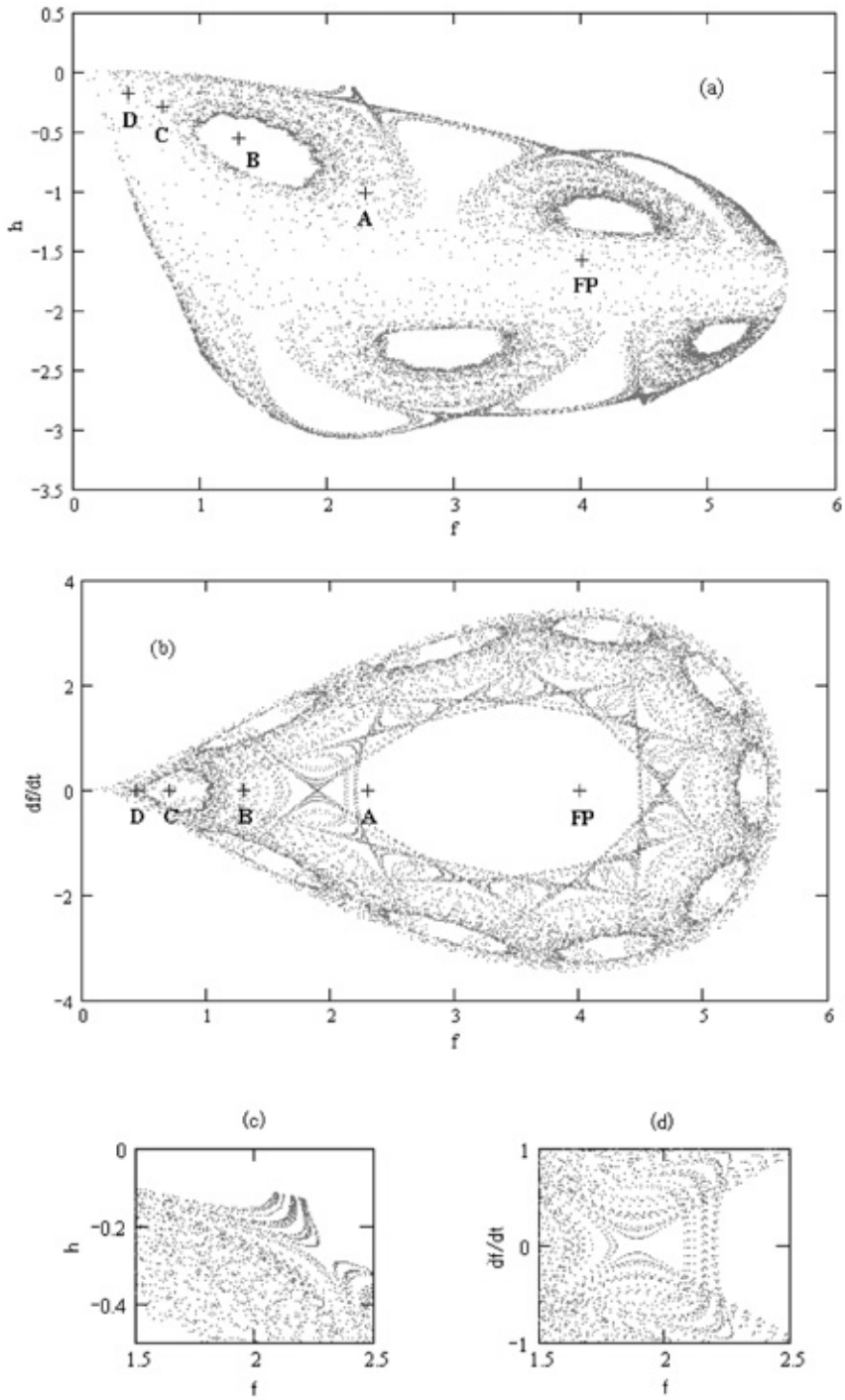


図 4 (a) : $\dot{h}=0$ での Poincaré 断面の $f-h$ 面上への射影。(b) : 同じく $f-\dot{f}$ 面上への射影。FP は固定点 $\bar{f}=4, \bar{h}=-1.58, \bar{f}=\bar{h}=0$ を表す。(c) : (a) の一部分の拡大図。(d) : (b) の一部分の拡大図。(c) と (d) は $t=16000$ までの計算である。

4.4. カオスへの移行

固定点 \mathbf{FP} のすぐ近くで、軌道は一般に 2 次元トーラス T^2 を形成する。これは、そのような場所ではヤコビ行列の固有値が一般に互いに非整合的な純虚数となるからである。整数比になる場合は、トーラスは不安定で、パラメータの変化とともに壊れていく (KAM 定理。例えば Berry 1978; Schuster 1988 を参照。) 初期条件を、 \mathbf{FP} から少しずつ変えたときに何が起きるかを見るために、図 4 に示された \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} (すべて $\dot{f}=\dot{h}=0$ とする) の 4 点を選び、そこから出発したときの時間変化を $0 \leq t \leq 1000$ の範囲で追跡した。結果を、前と同様に Poincaré 断面の射影と周波数分布として図 5 に示している。

軌道 \mathbf{A} (‘初期条件 \mathbf{A} の軌道’の意味、以下同様) と軌道 \mathbf{B} では二つの基本周波数 ν_0 と ν_1 が現れ、他の周波数はそれらの整数倍の和として与えられている。すなわち、軌道は準周期的で T^2 を形成する。(面白いことに、 \mathbf{A} では比 ν_1/ν_0 が黄金比 $(\sqrt{5}+1)/2=1.6180\dots$ に近い。) 軌道 \mathbf{C} でトーラスが壊れ始め、軌道 \mathbf{D} ではカオス的である。 T^3 の存在はまだ不明なので断定はできないが、われわれがここで見ているのは、エネルギーという外部パラメータの増加に伴う Newhouse-Ruelle-Takens の経路 (Newhouse, Ruelle, Takens 1978) を経てのカオスであるのかもしれない。(\mathbf{FP} から \mathbf{A} の間で起きる現象は、散逸系における、固定点から極限周期軌道に移行する Hopf 分岐を連想させる。)

4.5. エネルギー依存性

運動のカオス的側面は、初期条件を少し変えて軌道が $f > 0$ のみならず $f \leq 0$ の領域にも入り込むようにするとさらに明瞭になる。図 6 に、初期条件を $f=0.1$, $\dot{f}=0.05$, $h=\dot{h}=0$ ($E=0.00231$) としたときの Poincaré 断面を示す。この場合、 E が真空 $f=0$ よりも高く、代表点は軸 $f=0$ 上のポテンシャルの峠を乗り越え、その両側を不規則に行き来する。(図が軸 $f=0$ に関し対称でないことに注意。)

4.6. 指数の最大値

近接する軌道や軌道上の近接する点同士が、互いに引き付けあうまたは反発しあう傾向は Liapunov 指数で表される。「引き延ばし」効果が顕著なカオス領域では反発の傾向が強く、この状況は軌道に沿って長時間平均された最大 Liapunov 指数 λ_{\max} が正の値を取ることで示される。 λ_{\max} は、散逸系では初期条件の不連続関数で、力学系とアトラクターが決まると決まる。われわれの系は保存的で、解の連続性により軌道の形は初期条件に連続的に依存するので Liapunov 指数も初期条件の連続関数である。したがって、アトラクターが存在する散逸系の場合のような、力学系の制御パラメータのみの関数としての Liapunov 指数はない。

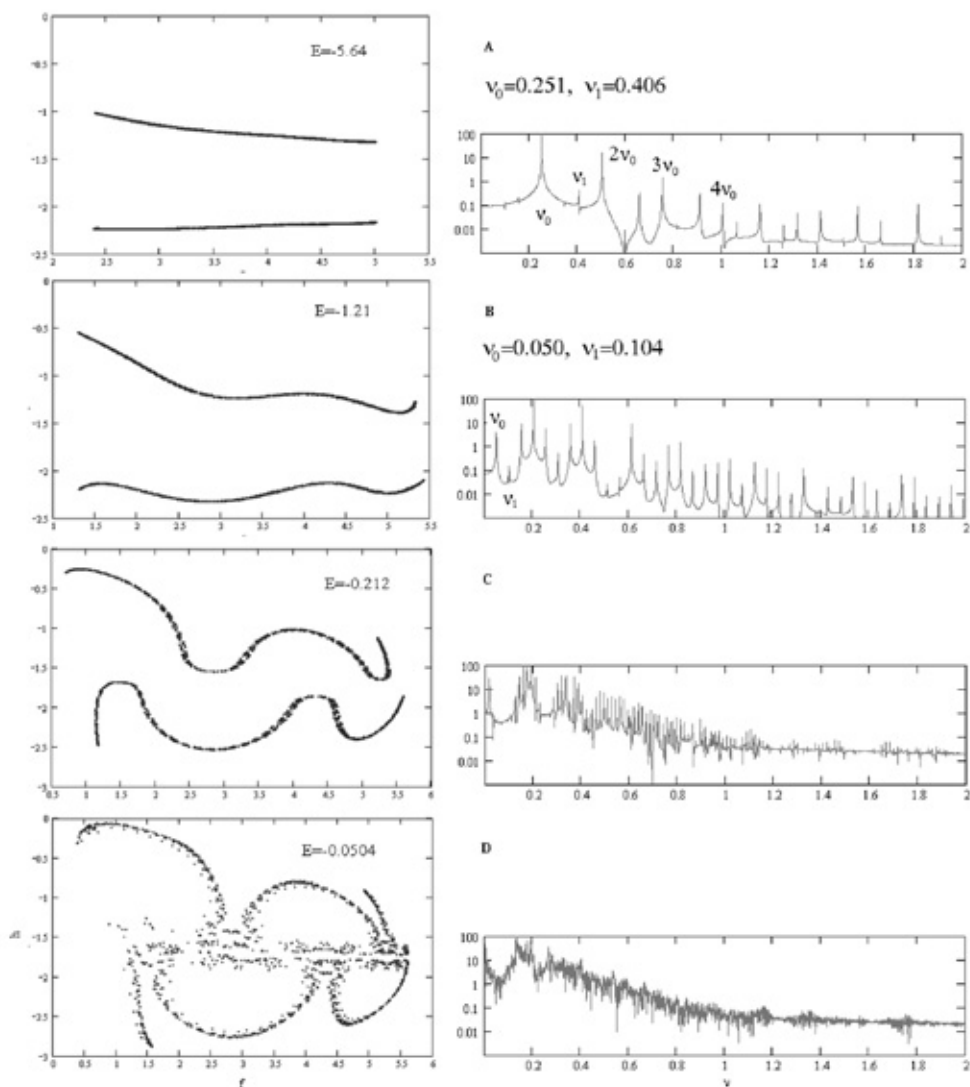


図5 $\dot{h}=0$ での Poincaré 断面の射影 (左) と周波数スペクトル (右)。各点の (f, h) の初期値とエネルギー E は次のようである。A : $(2.4, -1.02)$, $E = -5.64$; B : $(1.3, -0.552)$, $E = -1.21$; C : $(0.7, -0.298)$, $E = -0.212$; D : $(0.43, -0.183)$, $E = -0.0504$ 。

例えば、図4においてFPの近傍の軌道では $\lambda_{\max} = 0$ であるが、A, B, C, Dを初期条件とする軌道ではそれぞれ0.398, 0.692, 0.806, 0.861という値を取る。また、図4のPoincaré断面を与える元の軌道では0.847である。

このように、 λ_{\max} が正の値を取る軌道では、位相体積がある方向に急速に引き延ばされ、近接する軌道がすぐに離ればなれになる。この様子を見るために、はじめに $f-f$ 面上に小さな円弧状に2,000個の点を配列し、これを $t=0$ における状態とし、時刻 $t=35$ においてこれらの点がどのように配列するかを調べた。結果を図7に示す。これらの図から、問題に

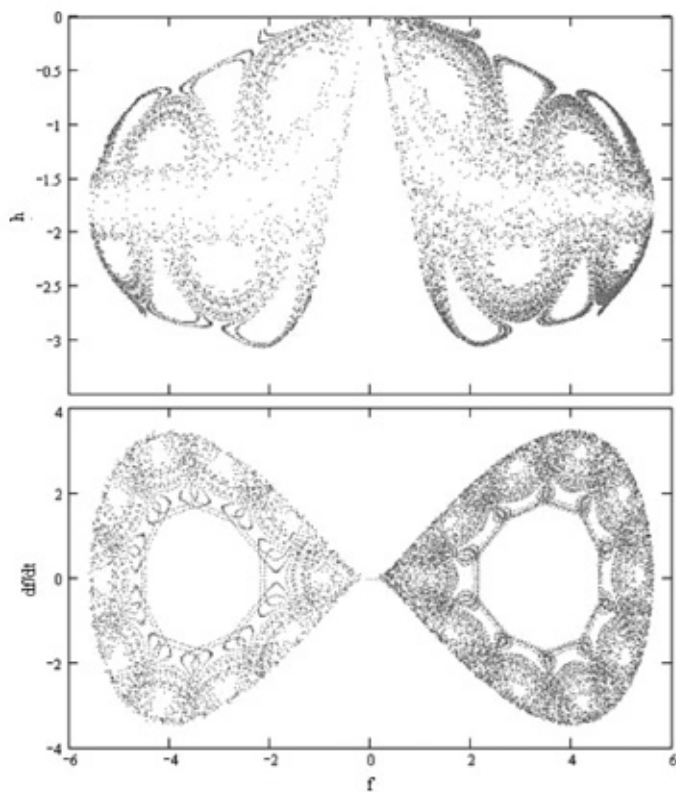


図6 (a) : $\dot{h}=0$ でのPoincaré断面の $f-h$ 面上への射影(上)と、同じく $f-\dot{f}$ 面上への射影(下)。初期条件は $f=0.1, \dot{f}=0.05, h=\dot{h}=0$ 。

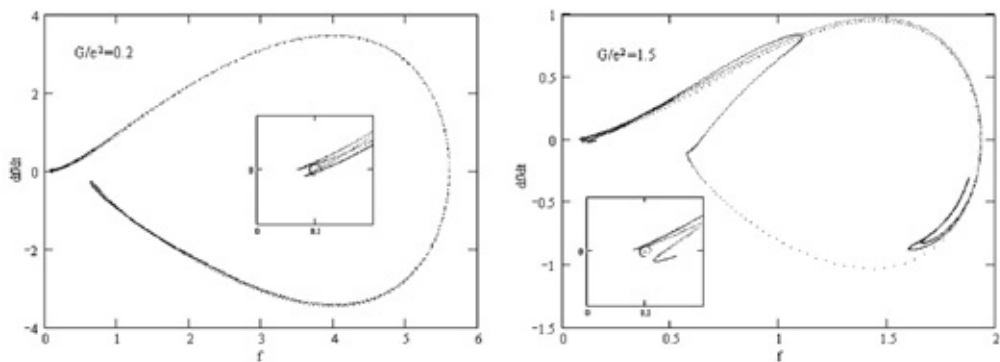


図7 $f-\dot{f}$ 面上に初期点2000個を、中心 $(0.1, 0)$ 半径 0.1 角度 0 と $3\pi/2$ の範囲の円弧状に配列し、 $t=35$ での点の位置を描く。左が $G/e^2=0.2$ 、右が $G/e^2=1.5$ 。はめ込み図は初期点列近辺を拡大したもの。

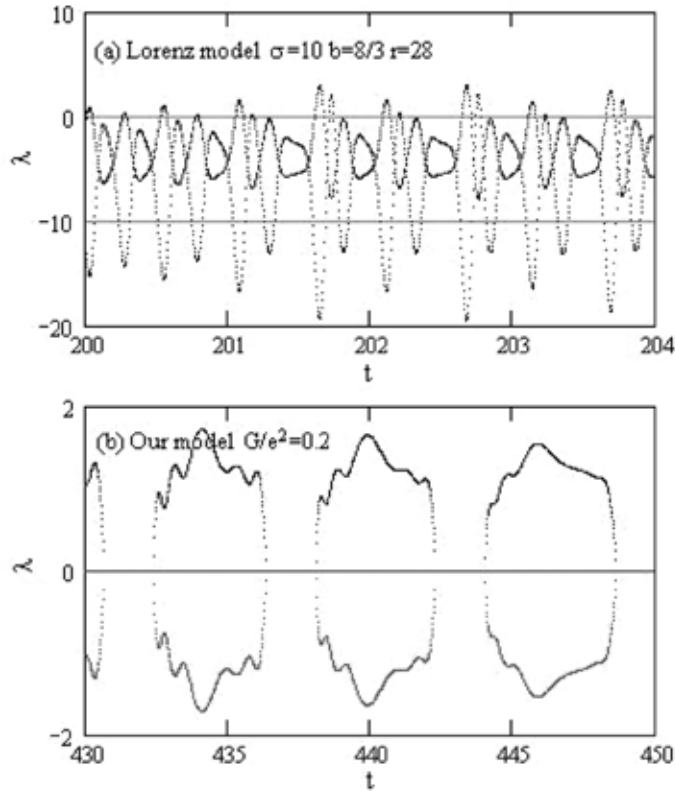


図 8 ヤコビ行列の固有値の時間変化。(a) Lorenz モデル($\sigma=10, b=8/3, r=28$)。(b) われわれのモデル ($G/e^2=0.2$, 初期条件: $f=0.1, \dot{f}=\dot{h}=\dot{h}=0$)。

している力学系が非常に強い引き延ばし効果を内包していることがよくわかる。

ついでに、ヤコビ行列の固有値の実部が軌道上でどのような値を取るかを、図 8(b) に示しておく。参考のために図 8(a) に散逸系の典型例として Lorenz モデル (パラメータは $\sigma=10, b=8/3, r=28$ 。これらのパラメータの意味については例えば Schuster (1988) を参照されたい。) の場合を示した。Lorenz モデルでは、最大固有値がたかだか 3 程度であるのに対し、負の固有値は -19 にもなり、非常に大きな押し潰し効果が見られる。しかも、正の固有値が現れる時間的割合は 0.2 にも満たない。これに対しわれわれの保存系モデルでは、正と負の固有値は対になって高い割合で現れ、引き延ばしと押し潰しの効果は常に釣り合っている。結果的に、最大 Liapunov 指数は既に述べたように 1 に近い値になっている。

最大 Liapunov 指数はヤコビ行列の最大固有値の平均で与えられるので最も計算しやすいという利点はあるが、その数値だけで上に見た系の振る舞いを描き出すことは不可能である。ここでは、系の引き延ばし効果の原因を見るために、図 4 の場合についてヤコビ行列の最大固有値の実部が Poincaré 断面上でどのように分布しているかを調べてみた。結果を、図 4 (a)

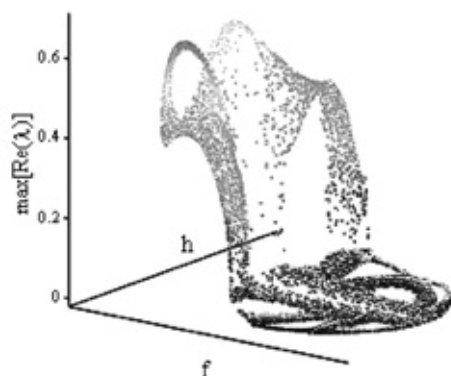


図9 $\max[\text{Re}(\lambda)]$ の、図3(a)に示された Poincaré 断面上での分布

上の点 $(f, h, \max(\text{Re}(\lambda_i)))$ の3次元散布図として図9に示す。図の底辺部の広い領域で $\max(\text{Re}(\lambda_i))=0$ (準周期的), 周辺の f が小さい領域で $\max(\text{Re}(\lambda_i))>0$ である。系は準周期的領域に長く留まった後, 小さい f の領域に移動してからすばやく f を増加させるようすが良く窺える。これが, われわれの系がカオスを生む直接的メカニズムになっていると考えられる。

4.7. G 依存性

これまでは, (13)において小さい G , すなわち $G/e^2=0.2$, の値を主に採用してきた。Weinberg-Salam 理論のような現実的な理論では, より大きい値, $G/e^2=1/(2\sin^2\theta_w)\approx 2.16$ が使われる。そこで最後に, G/e^2 を大きくしたときの系の振る舞いを調べておく。比較のために, 他の条件は図4の場合と同じにとる (したがって, G が大きいほど軌道のエネルギーが大きい)。

時系列, 周波数スペクトルは, ここには示さないが $G/e^2=0.2$ の場合のように低周波数領域ではランダムである。 G が大きくなるにつれ, 高周波数領域 ($G/e^2=0.2$ に対し $\nu>1.4$) ではほぼ一定値に近づく。

Poincaré 断面を図10に示す。 G が大きくなると細かい構造が失われるように見える。これは G が大きいほど周波数スペクトルが高周波数領域で単調になることと対応していると思われる。次元については前と同様にして, $G/e^2=0.7$ と2に対しそれぞれ $D=1.73\pm 0.33$, 1.84 ± 0.36 を得た。

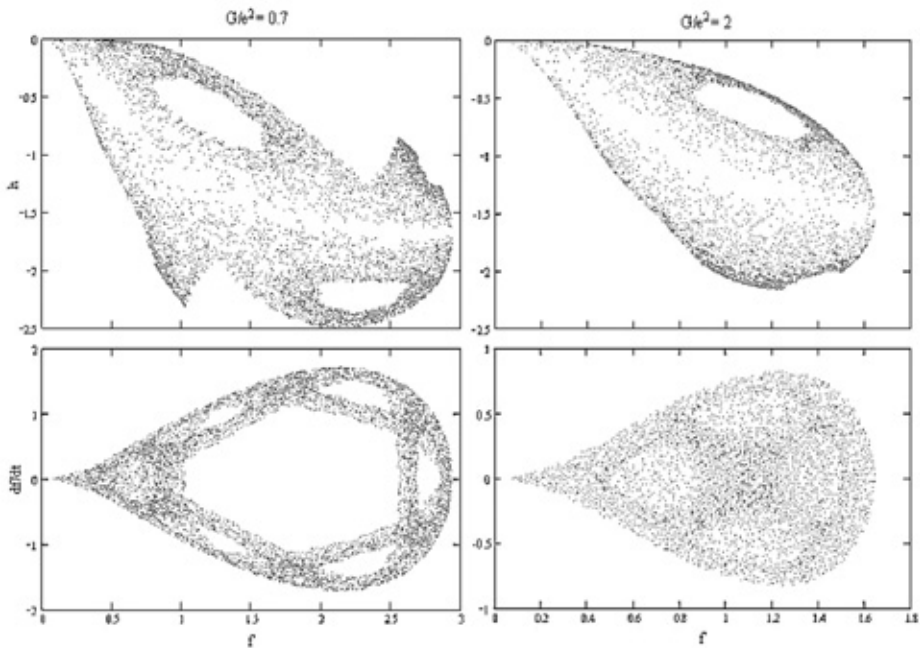


図 10 二つの G での Poincaré 断面。左: $G/e^2=0.7$, 右: $G/e^2=2$

5. 結論と課題

われわれは、荷電ベクトル場が強い磁場の下で不安定になることに注目して、不安定モードと強い磁場との相互作用を表す単純な保存力学系モデルをつくった。そして、とくに 0 主量子数・0 角運動量のモードについて、その運動を数値的に調べた。

初期条件（あるいはエネルギー）によって古典軌道は（準）周期的かカオス的かのいずれかになる。不安定モードの 4 次の結合定数 G が小さいとき、エネルギーの高い軌道はフラクタル性をもつことが、Poincaré 断面のフラクタル次元の計測からわかる。Poincaré 断面は、そのフラクタル構造がきわめて印象的であると同時に、位相空間内のいくつかのトーラス T^2 とその間の複雑な運動の存在を垣間見せてくれる。初期条件（あるいは系のエネルギー）を変えた軌道計算によると、低エネルギーでは二つのおそらくは非整合周波数による T^2 が形成される。エネルギーが上がるとあるところで T^2 は突然形を崩しカオスに移行するが、その前に 3 次元トーラス T^3 が形成されるのかはまだ確かめることができていない。もしこれが確認できれば、散逸系における T^3 を経てのカオスへの移行 (Newhouse, Ruelle, Takens 1978) に対応する現象が保存系でも起きることを示す具体的事例となる。

G が大きくなるとともに不安定モードのポテンシャルは浅くなり、軌道のフラクタル性は弱まるように見える。軌道は微分方程式のパラメータとともに連続的に変化するはずであ

る（例えば Hirsch, Smale, Devaney 2004）が、その変化がどのようなものかはまだわかっていない。

上記の事柄は、物理的に興味深い意味を持つ。臨界磁場を超える磁場のもとでは、荷電ベクトル場の運動は（準）周期的にもカオス的にもなり、必ずしも静的な配位に落ち着く（Skalozub 1985, 1986 ; Ambjørn, Olesen 1989）わけではない。相転移が 2 次で、エネルギー差が小さいうちの真の真空内での弦形成が可能な場合は、Skalozub と Ambjørn, Olesen が考えた場の配位が起きうるが、相転移が 1 次の時は、偽の真空と真の真空とのエネルギー差が大きいので、定性的には本稿での G が小さいケースと似た状況がつけられると思われる。カオスの古典的取り扱いの妥当性は問題になるが、このとき不安定モードの振幅は $O(m_0/e)$ 程度の大きな値に達するので、保存系に話を限れば、本稿での古典論的解析はそれほどのはずではないモデル的描像を与えてくれるのではないだろうか。

非アーベルゲージ場の不安定性によって、初期の宇宙で強磁場が生成し（Savvidy 1977 ; Matinyan, Savvidy 1978 ; Enqvist, Olesen 1994）、したがって本稿で見出されたような荷電ベクトル場の不安定モードによるカオスが宇宙的な舞台の上で実現する可能性がある。（カオスでの典型的な時間スケールは宇宙的な相転移の時間よりも短く、系はカオスの状態に十分長く滞在することができる。）現実には、ベクトル場はレプトンなどと結合し崩壊するので、そのことによる散逸効果を取り入れなければいけない。これが系の運動にどのような結果をもたらすかは興味のある問題である。

参考文献

- Ambjørn J and Olesen P, 1989 *Nucl. Phys.* **B315** 606 ; 1990 *ibid.* **B330** 193.
 Arnold V J, 1964 *Sov. Math. Dokl.* **5** 581.
 Berry M V, 1978 in *Topics in Nonlinear Dynamics* ((ed.) Jorna S, Am. Inst. Phys. Conf. Proc. **46**)
 Enqvist K and Olesen P, 1994 *Phys. Lett.* **B319** 195.
 Fermi E., Pasta J. and Ulam S. 1955, *Los Alamos Scientific Laboratory report* LA-1940.
 Fujimoto Y and Fukuyama T, 1983 *Z. Phys.* **C19** 11.
 Guth A and Steinhard P, 1989 *The inflationary universe in New Physics* (Cambridge University Press, Cmbridge) p 34.
 Hirsch M W, Smale S and Devaney P L, 2004 *Differential Equation, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos* (Elsevier, Academic Press, New York) p 147.
 Matinyan S G and Savvidy G K, 1978 *Nucl. Phys.* **B134** 539.
 Newhouse S, Ruelle D and Takens F, 1978 *Commun. Math. Phys.* **64** 35.
 Ruder H, Wunner G, Herold H and Geyer F, 1994 *Atoms in Strong Magnetic Fields* (Springer, New York), Chap. 2.
 Savvidy G K, 1977 *Phys. Lett.* **B71** 133.
 Schuster H G, 1988 *Deterministic Chaos*, (VCH, Cambridge) Chap. 7.

Skalozub V V, 1983 *Sov. J. Nucl. Phys.* **37** 283.

Skalozub V V, 1985 *Sov. J. Nucl. Phys.* **45** 665 ; 1986 *ibid.* **43** 1045.

Sogut K, Havare A and Acikgoz L, 2002 *J. Math. Phys.* **43** 3952.

Stoer J and Bulirsch R, 1996 *Introduction to numerical analysis*, third edition, (Springer New York)

Tsai Wu-Tang, 1973 *Phys. Rev.* **D7** 1945.

Vachaspati T, 1991 *Phys. Lett.* **B265** 258.

佐藤勝彦 2008, シリーズ現代の天文学 2 宇宙論 I (日本評論社) 第 1 章