

## 渦のパラドックスについて

高 橋 光 一

流体の運動法則によれば、無限空間中の定常で軸対称な渦としては、Burgers 渦と Sullivan 渦の二種だけが可能であると長年考えられてきた。一方、自然界には、コップの水をかき回してできる渦から銀河までさまざまな形の定常渦が形をほぼ連続的に変えつつ存在する。‘無限空間’という理論的条件が解の不連続性の原因になるとは考えにくい。この、流体力学における論理と経験の不整合の問題－渦のパラドックス－がどのように解決されたかを、最近の Takahashi (2014a, b) の研究に基づいて解説し、あわせて今後の展望を付説する。

### 1. はじめに

気体は自在に、また、液体は小さな力で容易に変形する。(前者と後者の違いは圧縮膨張のしやすさにある。) この二つの物質状態を流体と呼ぶ。流体の特徴の一つに、本稿の主題である渦運動がある。

運動している流体の一部を任意の二つに分けて考えると、その二つは一般に分割面を通して互いに力を及ぼし合っている。各部分に相互に速度差があると、それによって摩擦が生まれ、速い流体部分は減速され、遅い流体部分は加速される。この性質が粘性で、このときの、運動に対する抵抗力が粘性(応)力である。粘性力が速度差に比例するものを Newton(ニュートン) 流体と呼ぶ。我々の日常的環境に在る空気や水は Newton 流体と考えてよい。

水や空気の粘性は、水飴のようなものに比べ非常に小さいが、無視できない場合が多い。敢えて無視すると、その流れの中に置かれた物体が流れから受ける力の総和は 0 になるという結論に直ちに至る。これを「d'Alembert(ダランベール)のパラドックス」という。パラドックスと呼ばれるのは、一見粘性が無いと思える空気がつくる風でさえも、風圧で物体を移動ないし変形させることができることが、日常の経験上知られているからである。

Newton 流体の運動は、Navier-Stokes (ナヴィエ・ストークス, NS) 方程式によって記述されると考えられている。NS 方程式は、流体各部分は作用する力－粘性力, 二点間の圧力差, 外力等－の総和によって比例的に加速されるという、Newton 力学の運動法則に基づいて導かれる。

NS 方程式によれば、境界の無い空間中の非圧縮性流体は、定常 (= 時間的に変化しない) 軸対称 (= ある直線に関し回転対称性がある) 渦としては Burgers (バーガース) 渦 (Burgers 1948) と Sullivan (サリバン) 渦 (Sullivan 1959) の二種の状態だけをとると考えられていた (例えば Drazin and Riley 2006 を見よ)。Burgers 渦は中心軸に向かって渦巻きながら上昇するのに対し、Sullivan 渦では遠方の流体は流れ込みながら上昇、中心付近では外に向かって流れ出しながら下降し次いで上昇する。

これら二つの渦については、その状態が数学的に厳密かつ簡単な数式で表すことができているので、竜巻や台風の原型的モデルになると期待される。その数式に含まれるパラメータをどのように変えても、一方の渦から他方に変化させることはできない。この意味で、これらは互いに独立な流れであるといえる。

Burgers 渦と Sullivan 渦は 3 次元の全空間に広がり、運動エネルギーは共に無限大である。そのエネルギーを適当に再配分させることで、一方から他方に流れを連続的に変えることはいつでもできそうに見える。すなわち、直感的には、一方から他方への連続的変形の経路が存在し、それを方程式の境界条件を変えながら方程式を満足するように行うことが可能であるように思われる。それができないということは本当なのか。本当であるとすれば、「直感」のどこに問題があるのか。これが本稿での「渦のパラドックス」である。

場の理論では、同一の方程式の解でありながら、相互の連続的変形が許されない場合があることが知られている。無限の空間の中に有限エネルギーを局在させるソリトンがそれである。位相的ソリトンには弦状のもの (Nielsen and Olsen 1973) や球状のもの (t'Hooft 1974; Polyakov 1974; Skyrme 1961) があり、これらには不連続な位相不変量が存在する。この不変量は、無限遠にまで及ぶ場の振る舞いで決まる位相的性質に起因する<sup>1</sup>。これを変えるためには無限のエネルギーが必要となるので、位相不変量が異なるソリトン間の連続変形は不可能になる。非位相的ソリトンでは、場の方程式に内在する対称性に起因する不連続の保存量があって、それが異なる二つのソリトン間の遷移が禁止されることがある (Friedberg 他 1976; Takahashi 1979)。やはり弦状あるいは球状の解が知られている。Burgers 渦と Sullivan 渦は共にこのような不変量を持たない、かつもともと全エネルギーが無限大の配位なので、ソリトンの場合の禁止則は適用できないのである。

以下において、渦のパラドックスがどのように解決されたかを、Takahashi (2014a, b) の研究に基づいて解説する。

<sup>1</sup> ホモトピー群のことは借りれば、位相不変量は  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ,  $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$  の要素に対応している。

## 2. Burgers 渦と Sullivan 渦

Burgers 渦と Sullivan 渦の速度場  $v_B$  と  $v_S$  は、円筒座標系でそれぞれ以下のように与えられる ( $z$  軸の回りに渦巻いているとしている)。動径成分と  $z$  成分は

$$v_{Br} = -vkr, v_{Bz} = 2vz \tag{2.1}$$

$$v_{Sr} = -vkr + \frac{6v}{r}(1 - e^{-kr^2/2}), v_{Sz} = 2vz(1 - 3e^{-kr^2/2}) \tag{2.2}$$

$v$  は動粘性係数,  $k$  は任意の正のパラメータである。これに対応する方位角成分は次のように与えられる:

$$v_{B\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}(1 - e^{-kr^2/2}) \tag{2.3}$$

$$v_{S\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r H(\infty)} H\left(\frac{kr^2}{2}\right) \tag{2.4}$$

ここで

$$H(x) = \int_0^x \exp\left[-t + 3 \int_0^t (1 - e^{-s}) s^{-1} ds\right] dt$$

また,  $\Gamma$  は任意の定数である。これら二つの渦を表わすとき, 上の表現で  $k \rightarrow k/\nu$  とするのが習慣であるが, ここでは後の説明の都合上,  $k$  から因子  $\nu$  を取り出して表している。図 1 に Burgers 渦と Sullivan 渦の 3 次元流線を, また図 2 に  $\Gamma$  を共通にしたときの  $v_{B\theta}$  と  $v_{S\theta}$  の  $r$  依存性を描いている。Burgers 渦は強い渦を, Sullivan 渦は弱い渦を表す。

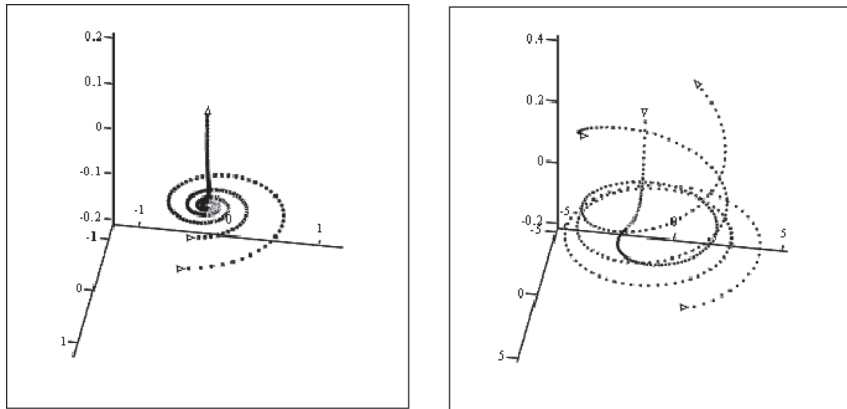


図 1 流線の 3D 図。(三角形は流れの向きを表す。点と点の間隔は流れの速さに比例する。) 左: Burgers 渦。流線は中心軸に向かって流れ込み, 上昇する。右: Sullivan 渦。中心軸から遠いところから流れ込む流線は, ある半径の円筒域に近づくとその面に沿って上昇する。中心の近くの流線は, まず渦巻き下降しながら外に向かって流れ, 先に述べた円筒面に近づく渦巻き上昇する。

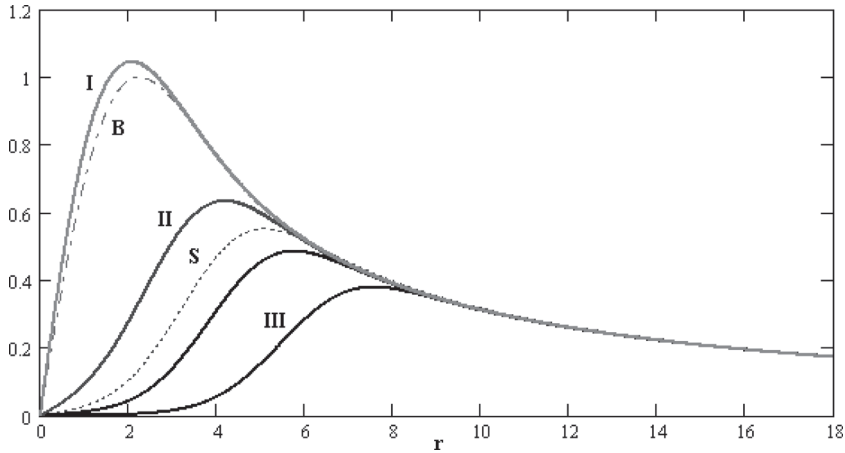


図2  $k=1/2$  のときの  $v_{B\theta}$  (鎖線 B) と  $v_{S\theta}$  (点線 S) の  $r$  依存性 (Takahashi 2014b)。Burgers 渦での最大値を 1 に規格化している。

Sullivan 解で  $\nu k$  を固定して  $k \rightarrow \infty$  とすると、動径成分と  $z$  成分は Burgers 解に一致するが、このとき方位角成分は  $\propto 1/r$  となり、図 2 に描かれた構造は消滅する。また、(2.1), (2.2) から、 $\Gamma$  をどのように変えても  $v_B$  を  $v_S$  に一致させることはできないことは明らかである。Burgers 解と Sullivan 解は、相互に移り変わることができない孤立した渦解であるかのである。

### 3. 定常軸対称解の粘性反転不変性

定常で軸対称な流れは、NS 方程式で時間微分と方位角微分を落としたものに従う。この方程式は次の粘性反転のもとで不変である：

$$\nu \rightarrow -\nu, v_r \rightarrow -v_r, v_\theta \rightarrow v_\theta, v_z \rightarrow -v_z, p \rightarrow p \tag{3.1}$$

物理的に意味があるのは  $\nu$  が正のときであるが、これは粘性応力が作用反作用の法則によって流体内の速度勾配を減少させるように働くことに対応している。そのことによってエネルギーは散逸するのであるが、流体は圧力勾配を下るように運動することで運動エネルギーを獲得し定常的に損失分を補って渦全体のエネルギーと構造を維持している。

$\nu$  が負—もちろん粘性が測定できる通常の流体では実現しない仮想的状況である—のときは、粘性は逆に速度勾配を大きくする効果を持つ。渦の定常性を実現するためには、このときに流体が獲得するエネルギーを消費しなければならない。圧力勾配を逆に遡って運動エネルギーをポテンシャルエネルギーに変えるのは一つの方法である。軸対称の流れでは、圧

力勾配は  $\partial_r p$  と  $\partial_z p$  が非ゼロなので、勾配を遡るためには  $v_r$  と  $v_z$  の向きを変えればよい。これが (3.1) による定常軸対称方程式の不変性の由来である。

#### 4. 一般的な定常軸対称渦解

粘性反転不変性により、 $v_\theta$  は  $\nu$  の偶関数、 $v_r$  と  $v_z$  は奇関数でなければならない。そこで速度場の各成分と圧力を次のようにおいてみる：

$$v_r = \nu v_{r1}, \quad (4.1)$$

$$v_\theta = v_{\theta 0}, \quad (4.2)$$

$$v_z = \nu v_{z1}, \quad (4.3)$$

$$p = p_0 + \nu^2 p_2, \quad (4.4)$$

これらを NS 方程式に代入し、 $\nu$  の巾数の等しい項を等値して

$$v_{r1} = \frac{1}{r} \int_0^r x(r) r dr \quad (4.5)$$

$$v_{\theta 0} = \frac{\Gamma}{2\pi r I(\infty)} I(r) \quad (4.6)$$

$$v_{z1} = -zx(r) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial_z p_2}{\rho} = -4k^2 z \quad (4.8)$$

ただし

$$I(r) = \int_0^r dr r e^{\int^r dr' v_{r1}(r')} \quad (4.9)$$

である。また、NS 方程式により  $x$  は次の式に従うことが判る：

$$\frac{d^2 x}{dr^2} = -x^2 + 4k^2 + \left( v_{r1} - \frac{1}{r} \right) \frac{dx}{dr} \quad (4.10)$$

(4.10) は、 $r$  を時間と見なすと、ポテンシャル  $x^3/3 - 4k^2 x$  の中を、右辺の最後の項で表される非保存力の作用も受けながら 1 次元運動する質点の運動方程式と見なすことができる。初期条件に応じて無限に多くの解があることが直ちに分かる。それらは物理的に意味のあるものだろうか。以後  $4k^2=1$  とする。

#### 5. 見逃されていた解

(4.5) と (4.10) に従う  $x$  を  $r=0$  のまわりで展開すると

$$x(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{0,n} r^{2n} + \ln r \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n} r^{2n} \quad (5.1)$$

を得る。 $a_{0,0}$  と  $a_{1,0}$  を与えると残りの  $a_{0,n}$  と  $a_{1,n}$  が微分方程式から決まり、解が定まる。 $a_{1,0} = 0$  であれば、無限遠で速度場の方位角成分が発散しないためには  $a_{0,0} = -1$  または  $2$  のみが許される。それぞれ Burgers 渦解と Sullivan 渦解を与える。

(4.10) から、この二つ以外に無限に多くの解があるはずであることを知ったが、それは  $a_{1,0} \neq 0$  のときである。このときは  $x$  が  $r=0$  で対数発散する。速度成分で見ると、 $r \rightarrow 0$  で

$$v_{r1} \propto r \ln r \quad (5.2)$$

$$v_{\theta 0} \propto r \quad (5.3)$$

$$v_{z1} \propto z \ln r \quad (5.4)$$

となり、 $z \neq 0$  で  $v_{z1}$  は対数発散する。このときでも、無限遠で  $v_{\theta 0}$  が発散しないような  $a_{1,0}$  と  $a_{0,0}$  の組が存在する。このことが可能  $a_{1,0}$  の下限があって、それは約  $-1.2$  である (Takahashi 2014b)。

(5.4) は、 $v_z = v_{z1}$  が  $r=0, z \neq 0$  で対数発散することを意味する。観測量が無限大となる解は物理的ではないので捨てるべきではないのだろうか。その判断をする前に、流体の速度の測り方を復習しておく。

粘性が無視できる流体については Bernoulli (ベルヌーイ) の定理というものがある。それは、一つの流線上のどの点でも

$$\frac{U^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{一定} \quad (5.5)$$

というものである。ここで、 $U$  は流速、 $g$  は重力の加速度、 $z$  は点の高さ、 $p$  は圧力、 $\rho$  は密度である。図 3 のように、速さ  $U$  の流れの中に物体を置いて、その正面で流れを一旦せき止める。その場所-淀み点という-では  $U = 0$  である。淀み点での圧力を  $p_0$  とする。流線は淀み点で分かれ物体の側面から後方に伸びていく。その適当な場所での圧力を  $p$  とする。高さの違いがないとすると、(5.5) より

$$U = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p)} \quad (5.6)$$

となる。すなわち、速度を圧力を測定することで知ることができるのである。圧力は、ある微小ではあるが有限の面積に作用する力を測定し、測定値をその面積で除して求める。

このように、一点での速度を測定するときでも、その周りのある広がりのある面が必要となる。観測にかかるのは、その面全体に作用する力である。運動量の時間的変化の割合が力

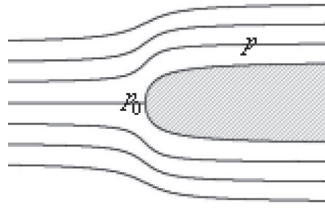


図3 流速の測定には有限の面積—この図では、物体の先端の淀み点を含む微小面積—が必要である。

であるから、力を知るということは面全体に作用する運動量の変化を知るということである。ここに述べた状況を  $z$  軸方向の流れを微小面積  $dS$  でせき止めた場合についてあてはめると、運動量の変化は

$$\int \rho v_z(\mathbf{r}) dS = 2\pi \int_0^\delta \rho v_z(r) r dr \quad (5.7)$$

に比例する。ここで流れを受け止める微小面は半径  $\delta$  の円であるとした。 $v_z$  の  $r$  依存性が (5.4) で与えられる場合、(5.7) は有限であり、観測値そのものが無限大となることはない。無限大の兆候が現れるとすれば、それは観測値を  $\pi\delta^2$  で割った値が  $\delta \rightarrow 0$  で変化する様相においてである。同様に、 $z$  軸上の微小流体部分が運ぶ運動エネルギー  $\int \frac{1}{2} \rho v_z^2 d\tau$  ( $d\tau$  は体積要素) も有限である。流体自身が局所的無限大のエネルギーを孕むことも無いのである。

以上の議論により、(5.4) に現れた対数発散は、観測量を常に有限とする、物理的に問題のない性質のよい発散であることが示された。従って新しい解は物理的解である。

## 6. 新しい渦と Burgers 渦・Sullivan 渦との関係

(5.1) で、 $a_{1,0}$  が正で大きいとき、渦は  $v_z(r=0)/z = +\infty$  で、かつ1つのセルからなる (I 型の渦)。 $a_{1,0}$  を連続的に減少させながら渦構造を連続的に変えていくことができるが、 $a_{1,0} = 0$  で対数特異点が消え Burgers 渦になる。このときの  $a_{0,0}$  は  $-1$  である。 $a_{1,0}$  を  $0$  からさらに減少させていくと  $a_{0,0}$  は増加し始め、 $a_{1,0}$  が約  $-1.2$  で  $a_{0,0} = 0$  となる。 $a_{1,0}$  が負なので  $v_z(r=0)/z = -\infty$  である。ここから  $a_{0,0}$  を小さい正の値にすると  $a_{1,0}$  は再び増加し始める。再度  $a_{1,0} = 0$  となったとき対数特異点は消え、Sullivan 渦が現れる。この間、セル数は2である (II 型の渦)。その先、 $a_{1,0}$  を正にして増加させると  $v_z(r=0)/z = +\infty$  でセル数は3となる (III 型の渦)。Takahashi (2014b) は、渦が可能な  $(a_{1,0}, a_{0,0})$  がパラメータ平面で螺旋を描くことを明らかにした。

I, II, III 型の渦の方位角速度成分は図2にその例を示している。II 型は Burgers 渦と Sulli-

van 渦を繋ぐことが分かる。加えて、I 型は Burgers 渦よりも強い渦を、また III 型は Sullivan 渦よりも弱い渦を表していることが分かる。

## 7. おわりに

パラドックスは、論理と直感・経験・常識との不整合から生まれる。古来、さまざまなパラドックスが見出され、論じられ、あるものは学問の発展に少なからぬ寄与をしてきた。無限に伴う多くのパラドックスはそのよい例である。

「無限」のような観念的概念を含む論理が生むパラドックスに対しては、少なくとも用いる言語系の数だけの異なる解決法がありうる。そのうちのどれを採用するかは、人が用いる言語系と、パラドックスを言語系にどのように位置づけるかに依る（例えば、吉田 1939 の所感を参照）。しかし学問的には、より普遍性のある、あるいは他の未解決の課題に対し新たな方法と展望を与えるものが価値のある解決法である（高橋 2001）。有名なアキレスと亀のパラドックスを例にとるならば、その解決法に価値があるのは、例えばそこで用いられる無限級数の概念が数学における解析学と物理学における古典的摂動論や量子論の繰り込み理論など、新たな近隣言語系の発展を促している場合である。

本稿で取り上げた渦のパラドックスも、突き詰めれば無限を巡るパラドックスであった。無限大を嫌い避けようとするのは物理学者の常であるが、我々がここで学んだのは、解が物理的であるか否かの判断をする前に、関数に現れる無限大が観測量にどのように作用するかを吟味しなければいけないということである。流体力学における流体は連続体なので、空間の一点での速度は観測量ではない。これが流体が質点と異なる重要な点である。観測上は、流体の速度は実は流体の小部分の速度であるので、流体力学における観測量は必ず運動量や運動エネルギーを積分した量となる。この積分量が有限であれば、速度場の無限大は何の問題にもならない。そのような無限大としては、対数無限大の他に巾無限大が考えられる。渦のパラドックスは対数無限大を認めることで解決された。結局、一点における無限大そのものではなく、無限大に至る過程が本質的であるという、よく知られた事実を我々は再確認することになったのである。この観点からの、流体がつくる流れの再検証が必要である。

興味深いのは、パラドックスの解決に至るきっかけとなった、定常軸対称渦が示す粘性反転不変性である。これに関連して次の二点に注意をしておきたい。

1. 粘性反転に伴う場の変換性に基づき第 4 節で用いた仮定は、 $\nu$  による巾展開に拡張できる。そして、 $\nu$  による巾展開は  $\nu$  が小さいあるいはレイノルズ数が大きい流れの解析に適



していると期待できる。この考え方で、竜巻、台風<sup>2</sup>、高伝導性プラズマ<sup>3</sup>、土星環、渦巻き銀河などのシステムを統一的に理解できる可能性がある。

2. 粘性の符号の反転は、いわば散逸に逆らうエネルギーの集積に対応する。言い換えれば、構造の生成に伴うエントロピー減少の過程に対応する。実は、そのような異常が起きていると見てもよい状況が存在する。それは乱流中での渦の生成である。これに対し、正の粘性が引き起こす渦の消滅は散逸による。粘性が乱雑に符号を反転させることが乱流の特性であるという見方が有効であれば、それはすなわち粘性係数を定数ではなく場の変数と見なすこと、すなわち乱流の場の理論の可能性を示唆している。これは考察を深めてみる価値のある課題であろう。

### 参考文献

- Burgers J M 1948 A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech.* **1** 171.
- Drazin P and Riley N 200 The Navier-Stokes equations, A classification of flows and exact solutions, *London Math. Soc. Lec. Note Ser. 334* (Cambridge Univ.)
- Friedberg R, Lee T D and Sirlin A 1976 A class of scalar-field soliton solution in three space dimensions, *Phys. Rev.* **D 13** 2739.
- Nielsen H B and Olesen P 1973 Vortex-line models for dual strings, *Nucl. Phys.* **B 61** 45.
- Polyakov A M 1974 Particle spectrum in the quantum field theory, *JETP Lett.* **20** 194.
- Skyrme T H R 1961 A nonlinear field theory, *Proc. Roy. Soc. London* **A260** 127.
- Sullivan R D 1959 A two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations, *J. Aerosp. Sci.* **26** 767.
- Takahashi K 1979 Soliton solutions of nonlinear Dirac equations, *J. Math. Phys.* **20** 1232.
- Takahashi K 2014a Non-Eulerian inviscid vortices, *Fac. Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)* **167** 43; [http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2014/pdf/no01\\_04.pdf](http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2014/pdf/no01_04.pdf).
- Takahashi K 2014b Classification of the steady axisymmetric vortices, *Fac. Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)* **168** 51; [http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2014/pdf/no06\\_03.pdf](http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2014/pdf/no06_03.pdf).
- tHooft G 1974 Magnetic monopoles in unified gauge theories, *Nucl. Phys.* **79** 276.
- 高橋光一 [Takahashi K] 2001 『パラドックスからなにを学ぶか』東北学院大学論集. 人間・言語・情報 **140** 1.
- 吉田洋一 [Yoshida Y] 1939 『零の発見』(岩波新書) pp 137-138

<sup>2,3</sup> セミナー「中小規模汎用エネルギー・発電への取り組み」(2014年12月20日日大理工学部)での高橋による報告『大 Reynolds 数を持つ単純渦について』。