

# 単純渦と台風<sup>1</sup>

高 橋 光 一

台風は地上の最も巨大かつ顕著な流体現象であって、その生成・生長・移動を理解することは、気象学の最も重要な課題の一つとなっている。その目的のためには、通常は強力な数値解析の手法が必須であると考えられている。基礎法則の非線形性と考慮すべき外的・内的条件の多さがその理由である。本稿では逆の立場をとり、複雑な気象現象である台風を可能な限り単純な物理モデルで理解することを試みる。

流体の運動を支配する標準的 Navier-Stokes (NS) 方程式では、非線形移流項と動粘性係数  $\nu$  に比例する応力項が重要な役割を演じる。NS 方程式を解く一般的な方法は見つからないが、これを  $\nu$  に関する巾展開の方法で解くことができる場合があることに注目する。 $\nu$  展開の後で無粘性の極限を取ることで、Euler 方程式では記述されない無粘性流、すなわち非 Euler 無粘性流を得る。このとき、実在しない流れの成分が、観測される流れを支配するという興味深い現象—チェンヤ猫効果—が起きる。無粘性ではないが Reynolds 数が大きい流れも、そのパターンは実質的にこの効果に支配される。チェンヤ猫効果に着目することにより、新しい定常渦解の系列を探し出すことができる。磁気流体力学への応用も可能である。

NS 方程式の渦解で、解が解析関数で表されるもの、あるいは、厳密な有限連立常微分方程式の数値解として表されるものを単純渦解と呼ぶことにする。また、単純渦解で表される流れを単純渦と呼ぶことにする。単純渦は乱流を含まず、その全体像は容易に把握できる。

台風は大きな Reynolds 数を持つ大規模渦である。このことに着目すると、台風の主な性質を非 Euler 無粘性単純渦の観点から準解析的に理解できる。定常渦としての成熟した台風は、力学的には無粘性単純渦で近似され、熱力学的には地球表面に蓄積したエントロピーを対流圏外に排出する内燃機関として機能することが示唆される。

重要語句: Navier-Stokes 方程式; 単純渦;  $\nu$  展開; チェンヤ猫効果; 台風; 目壁; 暖気核

## 目次

1. 流体力学における渦
  2. 粘性反転とチェンヤ猫効果および  $\nu$  展開
  3.  $\nu$  展開法の電磁流体力学への応用
  4. 台風概観
  5. 渦の安定性と台風
  6. 渦の熱的性質と台風
  7. おわりに
- 補足 流体内の温度分布  
参考文献

<sup>1</sup> 本稿は、日本大学理工学部（お茶の水）で開催されたセミナー「中小規模汎用エネルギー・発電への取り組み」（2014年12月20日）での講演と提出された報告書の内容に加筆補足したものである。

## 1. 流体力学における渦

### 1.1 渦

渦とは、2次元の場合は点、3次元の場合は曲線を周囲の流れが描く流線が取り巻くような運動のことである。大気の渦としては、旋風・竜巻・台風、あるいは飛行機のような運動体のいわゆる後方乱流がある。通常の粘性のある流体では、速度勾配が十分大きいところでは必ず渦ができる。

流線が描く図形が円のように閉じているあるいは螺旋状になる場合、その図形は観測の準拠系により必ずしも閉じない。速度が発散しない渦の概念は、Galilei 変換で不変ではないことになる（例えば木田・柳瀬 1999 を参照）。

速度場の回転 (curl)

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} \quad (1.1.1)$$

を渦度 (うずど) という。流れが渦を巻く程度を定量的に表す量と考えられている。有限の渦度を持つことを渦の条件に加えることもできる<sup>2</sup>。

例えば、速度場がスカラー量の勾配で表されるとき、すなわち

$$\boldsymbol{v} = \nabla \phi = (\partial_r \phi, \partial_\theta \phi / r, \partial_z \phi)$$

のときは渦度 (1.1.1) が 0 である。ところで速度場は  $\theta$  の周期関数でなければならず、したがって  $\phi$  とその微分も同様である。特に、その  $\theta$  による微分—すなわち  $v_\theta$ —は  $z$  軸を一周する間に、必ず正と負の符号を同じ回数だけ取り、流体の各部分の速度を連続的に繋いだ線—流線—は  $z$  軸を回ることができない。すなわち渦度が 0 であるこの例では確かに渦は存在しない。

ただし、渦のあるなしと渦度の非ゼロかゼロかは 1 対 1 に対応していない。

渦的な流れを直感的に捉えるのに便利なもう一つの量が循環

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = \int \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.1.2)$$

である。ここで最初の線積分はある閉曲線に沿って、2 番目の面積分は曲線で囲まれた任意の面上で行う。粘性がなく圧力が密度で決まる流体では  $\Gamma$  は時間に依らず一定である (Kelvin の定理)。

<sup>2</sup> 上記の定義を満たすが渦度が 0 になる例は、円筒座標系で  $\boldsymbol{v} = (0, ar, 0)$  である。また、渦ではないが渦度が 0 でない例として、直交座標系での  $\boldsymbol{v} = (ay, 0, 0)$  がある。

以上の事情により、‘渦’は局所的概念ではなく、大域的に定義されるべきであることがわかる。Kelvin の定理があるのでこれを生かし、循環  $\Gamma$  を指標として次のように定義しておこう：

向き付けした閉曲線で、その上で  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$  が符号を変えないものがあるとき、2次元の場合はその閉曲線の内部の、3次元の場合はその閉曲線を含む閉局面の内部の流れを渦とよぶ。

流れを特徴付ける典型的な速さ  $U$  と代表的な長さ  $L$  から

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1.1.2)$$

で与えられる数を Reynolds 数という。 $\nu = \mu/\rho$  は粘性係数を密度で除したもので、動粘性係数と呼ばれる。直径 2 m のロケットが大気中を毎秒 10 km で飛行するときの  $Re$  はおよそ  $10^9$  である。渦はしばしば  $Re$  が大きい乱流に現れる。ただし、 $\nu = 0$  である超流体は除く。

大気現象は一般に複雑でカオス的である (Lorenz 1963)。大気中に生成する大きな渦は、乱流一般の中の渦と比較すると長時間ほぼ一定の形を保つので、その状態や変化の動向を理解することは一見易しいことのように思われる。しかし、理解への期待のレベルを考えると事はそれほど単純ではない。

## 1.2 Navier-Stokes 方程式

流体の相接する二つの部分間には、相対速度を小さくしようとする力が働く。この性質を粘性といい、作用する力を粘性応力と呼ぶ。粘性応力が速度勾配に比例する流体を Newton 流体と呼ぶ。Newton 流体の運動は次の Navier-Stokes (NS) 方程式

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{f} \quad (1.2.1)$$

で記述されると考えられている。 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  は場所  $\mathbf{r}$  での流れの速度、 $p$  は圧力、 $\boldsymbol{\Omega}$  は系の回転角速度 (定数とする)、 $\mathbf{f}$  は単位質量当たりの外力である。円筒座標系  $(r, \theta, z)$  では次のように書ける：

$$\begin{aligned} \partial_t v_r + v_r \partial_r v_r + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta v_r + v_z \partial_z v_r - \frac{v_\theta^2}{r} = \nu \left( \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta v_\theta \right) \\ - \frac{1}{\rho} \partial_r p + 2\Omega v_\theta + f_r \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

$$\begin{aligned} \partial_t v_\theta + \frac{v_r}{r} \partial_r (r v_\theta) + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta v_\theta + v_z \partial_z v_\theta = \nu \left( \nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \partial_\theta v_r \right) \\ - \frac{1}{\rho r} \partial_\theta p - 2\Omega v_r + f_\theta \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

$$\partial_t v_z + v_r \partial_r v_z + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta v_z + v_z \partial_z v_z = \nu \nabla^2 v_z - \frac{1}{\rho} \partial_z p + f_z \quad (1.2.4)$$

ここで、速度場と外力を  $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ ,  $\mathbf{f} = (f_r, f_\theta, f_z)$  と書いている。通常は、これと共に質量保存の式

$$\partial_t \rho + \frac{1}{r} \partial_r (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \partial_\theta (\rho v_\theta) + \partial_z (\rho v_z) = 0 \quad (1.2.5)$$

を、適当な境界条件と共に満足する速度場を NS 方程式の解と考える。

NS 方程式は、それが微分方程式であることからわかるように、物質の連続体近似によって導かれる。従って、原子や分子の平均自由行程より十分長い距離で意味を持つ。解析解に特異点がある場合、そのことで解が全体として意味を失うかどうかは状況に応じて注意深く検討されなければならない。

NS 方程式の特徴は、非線形項と粘性項に現れている。非線形項は移流項とも呼ばれ、与えられた速度場にしがって物質が運動するときに生じる加速度を正しく評価するために必要である。粘性パラメータ  $\nu$  を含む粘性項は微分の最高階数の項である。これら二つの項のために、NS 方程式の解は千変万化する。

典型的な速さ  $U$  と典型的な長さ  $L$  を用い、速度場、空間と時間の各座標を  $U$ ,  $L$ ,  $L/U$  で規格化したものを新たに速度場、空間、時間とすると、(1.2.1) で  $\nu \rightarrow 1/Re$  と置き換えた式になる。(圧力と力は適当に変換する。2.3 を参照のこと。)

### 1.3 NS 方程式の渦解：Burgers 解と Sullivan 解

非常に多くの NS 方程式の厳密解が知られている。個々の厳密解やそれを見つける手続きについては Drazin and Riley (2006), Wang (1989, 1991) とその引用文献などを参照されたい。また、'厳密解'の意味については第 6 節を参照されたい。本稿では、定常渦を扱う。非定常渦解についての研究も Oseen (1911), Rott (1958), Moffatt (2000) によるもの等多く報告されている。Drazin and Riley (2006) の 5.6 節に一般的な解説がある。

性質のよく知られた解析関数で表される渦解、あるいは解析の容易な一組の常微分方程式で表される渦解を単純渦解と呼ぶことにする。現実の渦が、しばしば再現不可能な複雑な振る舞いを示し、データ量の極めて多い数値計算または統計分析でのみ捉えることができるのと対照的な概念である。

無限に広がる単一の定常的かつ軸対称な単純渦解としては、Burgers (1948), Sullivan (1959), Donaldson-Sullivan (1960, 詳しくは Baker 2000 を参照) の厳密解が知られていた。これらの渦には対称軸と対称面がある。対称軸を  $r = 0$ , 対称面を  $z = 0$  とする。Sullivan 解と Donaldson-Sullivan 解とは解析的構造が似ているが、後者には  $r = 0$  に非物理的特異点が

ある。パラメータ数が Sullivan 解よりも 1 つ多く、そのパラメータを適当にとると Sullivan 解になる。以下では Burgers 解と Sullivan 解で記述される渦を参照しながら議論を進める。

Burgers 渦は速度の動径成分が負で、中心に向かって流れ込みながら渦巻く。軸方向成分  $v_z$  も  $z$  の正または負の領域全体でそれぞれ一定の符号をとるので、それぞれの領域で上昇または下降流のみが存在する。Sullivan 渦は、無限遠から渦中心に近づくに従って動径成分の絶対値は減少し、ある動径距離で動径成分の符号が負から正に変わる。軸方向成分も、ある動径距離で符号が変わる。これらのことから、Burgers 渦は 1 セル、Sullivan 渦は 2 セル構造であるといわれる。ちなみに、Donaldson-Sullivan 渦は一般に 3 セル構造を持つ。図 1.1 に、Burgers 渦と Sullivan 渦の速度場 ( $v_r, v_z$ ) を  $r$ - $z$  面内 ( $z > 0$ ) に示した。また、図 1.2 にはそれぞれの  $v_\theta$  を  $r$  の関数として示している。

$z > 0$  の部分だけを考える。中心から遠く離れたところで反時計回りの流れ込みがあるよ

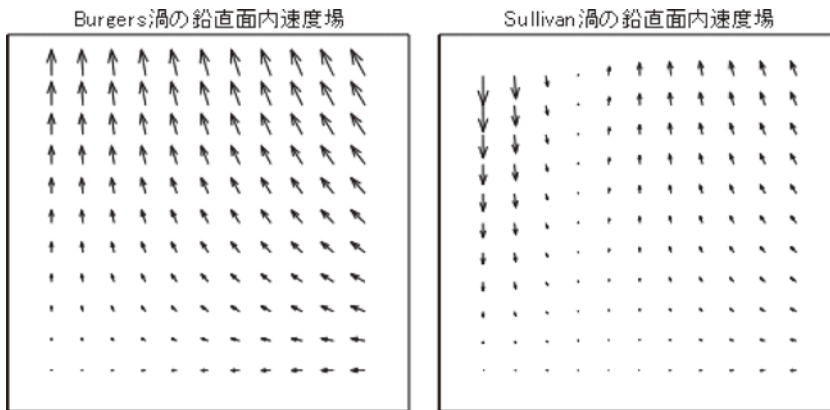


図 1.1 Burgers 渦 (左) と Sullivan 渦 (右) の速度場 ( $v_r, v_z$ )

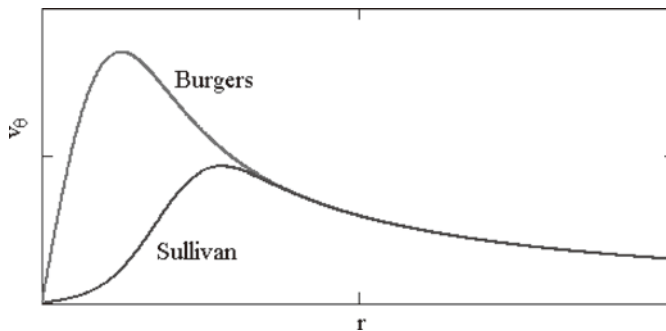


図 1.2 Burgers 渦と Sullivan 渦における  $v_\theta$  の  $r$  依存性。無限遠での循環を共通に取っている。

うにすると、そこでは  $v_z$  は正である。このとき、Sullivan 渦では中心付近のセルで下降流が生じている。

Burgers 解と Sullivan 解は、無限遠での循環を固定したとき、共に 1 パラメータ関数で表される。このパラメータ（通常  $k$  と書く）を変化させても一方から他方へと変化させることはできず、これらの解の関係は不明であったが、最近になって Burgers 解と Sullivan 解を繋ぐ解の経路が明らかになった (Takahashi 2014a, b)。違いは境界条件の取り方にある。後で述べる電磁流体力学とも関連するので、この辺りの事情を以下で少し詳しく説明しておく。適宜、台風との対応点にも言及する。

## 2. 粘性反転と $\nu$ 展開およびチェシャ猫効果

### 2.1 粘性反転と $\nu$ 展開

定常軸対称の渦を考える。この場合、(1.2.2)～(1.2.5) の方程式で時間と方位角に関する微分の項を落として残りを眺めると、それは次の変換で不変であることが判る：

$$\nu \rightarrow -\nu, v_r \rightarrow -v_r, v_\theta \rightarrow v_\theta, v_z \rightarrow -v_z, p \rightarrow p \quad (2.1.1)$$

すなわち、 $v_r$  と  $v_z$  は  $\nu$  の奇関数、 $v_\theta$  と  $p$  は偶関数である。

(2.1.1) のもとでの不変性は以下のような事情に由来する。物理的に意味があるのは  $\nu$  が正のときであるが、これは粘性応力が作用反作用の法則によって速度勾配を減少させるように働くというのである。そのことによってエネルギーは散逸するのであるが、流体は圧力勾配に従って運動することで定常的に損失分を補って渦のエネルギーと構造を維持している。 $\nu$  が負のときは、粘性は逆に速度勾配を大きくする効果を持つ。それによって流体が獲得するエネルギーを、今度は圧力勾配を逆に遡って消費することで渦の定常性が実現できることになる。いまの場合、圧力勾配は  $\partial_r p$  と  $\partial_\theta p$  が非ゼロなので、そのためには  $v_r$  と  $v_z$  の向きを変える運動をすればよい。これが (2.1.1) による NS 方程式の不変性の由来である。

(2.1.1) の変換を粘性反転と呼ぶことにする。もしも速度場と圧力が  $\nu$  について巾（すなわち Maclaurin）展開可能だとすると、粘性反転不変性は、 $v_r$  と  $v_z$  が  $\nu$  の奇数巾項のみを、 $v_\theta$  と  $p$  は偶数巾項のみを含むことを意味する。

### 2.2 $\nu$ 展開と一般解

ここでは  $\Omega = 0$  の場合に話を限る。（定常軸対称の速度場のとき、 $v_\theta \rightarrow v_\theta - \Omega r$ ,  $f_r \rightarrow f_r - \Omega r$  の置き換えで、(1.2.2)～(1.2.5) から見かけ上  $\Omega$  を消すことができる。） $\nu$  展開法とは、NS

方程式に現れる速度場と圧力を $\nu$ の有限巾に展開し、その展開係数を次数の高いものから順次求めていくというものである。本来、展開は無限の次数まで可能であるが、取りあえず次のように有限のところで打ち切ったものを考える。Burgers 渦と Sullivan 渦はこの展開による解になっていること、台風のような Reynolds 数の大きい流れに対して良い近似になることを期待してのことである。

$$v_r = \nu v_{r1} \quad (2.2.1)$$

$$v_\theta = v_{\theta 0} \quad (2.2.2)$$

$$v_z = \nu v_{z1} \quad (2.2.3)$$

$$p = p_0 + \nu^2 p_2 \quad (2.2.4)$$

展開係数の添え字の数字は $\nu$ の次数を表す。(2.2.1)～(2.2.4)をNS方程式に代入し、 $\nu$ の次数が同じ項を比較して、 $\nu$ に依存しない一群の方程式が得られる：

・0次の式

$$-\frac{v_{\theta 0}^2}{r} + \frac{1}{\rho} \partial_r p_0 - f_r = 0 \quad (2.2.5)$$

$$\frac{1}{\rho} \partial_z p_0 - f_z = 0 \quad (2.2.6)$$

・1次の式

$$\frac{v_{r1}}{r} \partial_r (r v_{\theta 0}) = \nabla^2 v_{\theta 0} - \frac{v_{\theta 0}}{r^2} \quad (2.2.7)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \rho v_{r1}) + \partial_z (\rho v_{z1}) = 0 \quad (2.2.8)$$

・2次の式

$$v_{r1} \partial_r v_{r1} + \frac{\partial_r p_2}{\rho} = \nabla^2 v_{r1} - \frac{v_{r1}}{r^2} \quad (2.2.9)$$

$$v_{r1} \partial_r v_{z1} + v_{z1} \partial_z v_{z1} + \frac{\partial_z p_2}{\rho} = \nabla^2 v_{z1} \quad (2.2.10)$$

0次の式はNS方程式で $\nu=0$ とおいたものでEuler方程式に他ならない。さらに

$$x = -\frac{v_{z1}}{z} \quad (2.2.11)$$

なる $x$ が $r$ のみの関数となる解が存在し、それは微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dr^2} = -x^2 + 4k^2 + \left(v_{r1} - \frac{1}{r}\right) \frac{dx}{dr} \quad (2.2.12)$$

に従うことがわかる。 $k$ はある定数である。

$x$ は $r=0$ の周りで次のように展開できる：

$$x(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{0,n} r^{2n} + \ln r \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n} r^{2n} \quad (2.2.13)$$

$a_{0,0}$  と  $a_{1,0}$  を与えると (2.2.12) から高次の係数が決まる。 $v_{r1}$  と  $v_{\theta0}$  は  $v_{z1}$  と次のように関係づけられることもわかる：

$$v_{z1} = -\frac{z}{r} \frac{d}{dr}(rv_{r1}) \quad (2.2.14)$$

$$v_{\theta0} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \int_0^r dr r e^{\int^r dr' v_{r1}(r')} \quad (2.2.15)$$

$\Gamma$  は任意の定数である。

(2.2.13) より，一般に  $v_{z1}$  は  $r = 0$  で対数的に発散するが，これは観測量にどんな悪さもしない。 $r = 0$  での速度を測定するときは， $z$  軸を含むある半径内の運動量やエネルギーを測定するが，これはいつも有限で，半径を小さくすればいくらかでも小さくなるからである。結果として，温度，圧力といった熱統計学的量は対数発散があっても常に有限に計測される。

速度場が無限速で暴走的に発散しないという要請を置くと， $a_{0,0}$  と  $a_{1,0}$  は勝手な値は取れない。この要請に従う物理的に意味のある解を与えるパラメータの組  $(a_{1,0}, a_{0,0})$  の集合は，図 2.1 に示したような螺旋状の曲線になる。ここでは  $k = 1/2$  としている ((2.2.12) で， $x \rightarrow 2kx, r \rightarrow r/2k$  と尺度変換するとこの場合に帰着する)。特に  $a_{1,0} = 0$  に対しては 2 つの解が可能で， $a_{0,0} = -1$  が Burgers 渦， $a_{0,0} = 2$  が Sullivan 渦を与える。 $(a_{1,0}, a_{0,0}) = (0, 1)$  は渦解にはならない。

Burgers 解と Sullivan 解の二つにより，図 2.1 の曲線は 3 つに分けられる。それらを I (第 4 象限)，II (第 2, 3 象限)，III (第 1 象限) と名付け，それらに対応する解をそれぞれ I 型，II 型，III 型の渦と呼ぶことにする。I から II，II から III に移るとき， $a_{1,0}$  は符号を変えるので， $\ln r$  項によって  $x$  は  $r = 0$  近傍での振る舞いを  $+\infty$  から  $-\infty$  まで不連続的に変える。すなわち，I 型，II 型，III 型の渦の形は，互いに位相的に不連続である。このことは  $v_{z1}$  の不連続性として現れる。

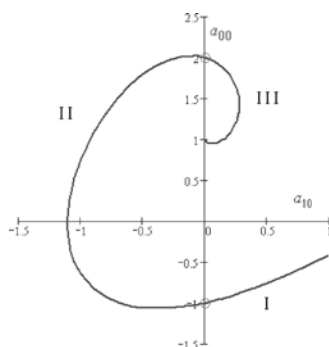


図 2.1  $k=1/2$  の場合の  $(a_{1,0}, a_{0,0})$  のパラメータ空間における定常渦解曲線。円は Burgers 解と Sullivan 解に対応。(Takahashi 2014b)



渦構造については、Sullivan (1959) の用語を使うと、I 型と Burgers 渦は 1 セル、II 型と Sullivan 渦は 2 セル、III 型は 3 セルである。III 型の一番内側のセルは  $\ln r$  項によるもので、他のセルに比べサイズが非常に小さい。

これら 3 つの型を特徴付ける‘位相不変量’のようなものは存在しない。(それに準ずるものとして  $x(0) - x(\infty)$  のような量を考えることはできる。) 言い換えれば、有限領域のエネルギーや運動量のような、積分して得られる観測量はすべて有限で、かつパラメータに関して連続である。 $v_{r1}$ ,  $v_{\theta 0}$  も連続的に変化する。図 2.2 には、I, II, III 型の解における  $v_{\theta 0}$  の関数形を示す。 $v_{\theta 0}$  の連続性が見て取れよう。ただし、 $v_{z1}$  は  $r = 0$  で不連続である。

このような多様な定常解の存在する事情は、(3.2.12) で  $r$  を時間と見なすことで、考えている渦系が質点の 1 次元力学系と同等になることに注意することで容易に理解できる。これについては Takahashi (2014a, b) を参照されたい。

大 Reynolds 数の極限すなわち無粘性極限では速度場は  $v_{\theta} = v_{\theta 0}$  のみを有限成分とし、 $v_r$  と  $v_z$  は 0 となる。しかし、 $v_{\theta 0}$  は  $v_{r1} = v_r/\nu$  を使って表されるという点は注目すべき事である。直接観測にかかる物理量 ( $v_r$ ) は 0 であるがその属性 ( $v_{r1}$ ) は有限に存在し、かつ有限の観測量  $v_{\theta 0}$  を生み出すのである。このような、実体が消えた後でもその一部の影響が残る現象を‘チェシャ猫効果 - Cheshire cat effect’と呼ぶことにする<sup>3</sup>。この効果があるために、無粘性と無粘性極限とは一般に質的に異なるものとなる<sup>4</sup>。

図 2.2 は、NS 方程式には、定常渦に限ってもさまざまな大きさの‘目’-すなわち対称軸近辺の  $v_{\theta}$  の凹み - を持つ解があることを示す。無限遠での循環が同じなら (境界条件でそのように設定できる)

### I 型 → Burgers 渦 → II 型 → Sullivan 渦 → III 型

の系列 (の逆) の向きに運動エネルギーは減少 (増加) する。また、最大速度を一定に規格化するなら、無限遠での循環は目の空間的範囲と共に上の順に増加する。つまり目の大きさそのものは、渦の最大方位角速度とは直接の関係はない。このような解の連続的系列は、台風がさまざまな目を持つこと、あるいは、上記と逆の系列をたどれば熱帯低気圧・台風が成長と共に目の範囲を小さくすることと対応しているように見える。これが、単純渦による台

<sup>3</sup> 『不思議の国のアリス』(ルイス・キャロル 1865) で、アリスが出会った木の上のチェシャ猫が姿を消した後に、その笑いだけが残ったという話による。その下の説明から分かるように、この現象がはっきりと見えるのは、円筒座標系においてである。チェシャ猫効果の存在を直交座標系で最初に示したのは、たぶん Oseen (1927) であろう。Oseen は、薄い円盤にぶつかる流れの解析解を Green 関数の方法で求めるときに、同じ現象に注意を払っている。

<sup>4</sup> Reynolds 数が大きいときの現象として乱流があるが、乱流の特徴的性質も無粘性流体の性質とは異なることは昔から気付かれていたことである。例えば Neumann 1949 (岡本・山田による日本語訳がある) を参照されたい。

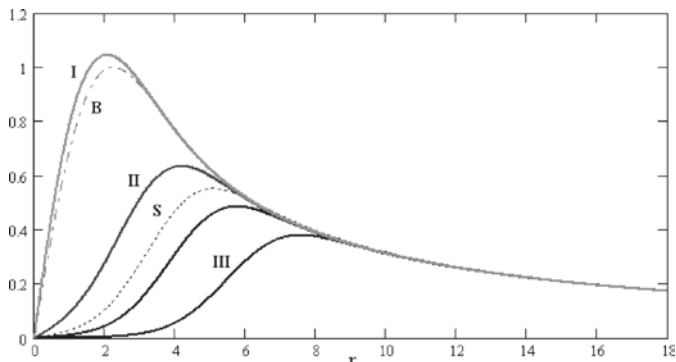


図 2.2 I, II, III 型の渦解における。B, S はそれぞれ Burgers 解, Sullivan 解を表す。無限遠での循環がすべて同一になるよう規格化している。(Takahashi 2014b)

風現象の理解への試みを深めようとする動機となる。

NS 方程式の非定常渦解について付言しておく。無限遠での循環を共通にしたときに目を広げながら減衰する解として、Oseen (1911) の非定常解 ( $v_r = v_z = 0$ ), あるいはそれを一般化した Rott (1958) の解 ( $rv_z/(zv_r) = -2$ ) が知られている。共に 1 セル解で、時間的には拡散的 (図 2.2 の I → II → III と似た) 変化をする。2 セルおよび 3 セルへの拡張は、Bellamy-Knights (1970, 1971) によってなされた。いずれも、 $r = 0$  で正則な非定常解で、上で与えた系列 I → II → III 上の解とは異なるものである。

### 2.3 $\nu$ 展開の物理的意味

着目する現象の典型的長さ  $L$  と典型的速さ  $U$  で距離, 速度と時間を

$$r \rightarrow Lr, v \rightarrow Uv, t \rightarrow (L/U)t$$

と尺度変換し, NS 方程式を Reynolds 数を用いて

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v = \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \frac{1}{\tilde{\rho}} \nabla \tilde{p} + \tilde{f}$$

と書き直す。 $\tilde{\rho} = \rho/L^3, \tilde{p} = (L^3/U^2)p, \tilde{f} = (L/U^2)f$  はそれぞれ新しい尺度で測った密度, 圧力, 外力である。これからわかるように,  $\nu$  展開は大きい  $Re$  の系に対する近似法である。

台風が時間的に発達する場合のように,  $Re$  がゆっくりと大きくなるときは, 系は  $Re$  が小さいときの痕跡をどこかに残しながら変化するであろうから,  $Re$  を初めから無限大にした Euler 方程式では表すことができない状態に到達するはずである。 $\nu$  展開法は, 誕生と消滅を伴う大規模流体现象を解析するときの有効な方法になると期待できる。

## 2.4 境界のある渦

非圧縮性流体の NS 方程式に、境界がある定常渦解は見つかっていない。ν 展開法の枠組みの中で、非圧縮性流体は境界があると定常渦をつくることはできないことを示すことができる。そこで話を一般化して、ここでは圧縮性流体（またはバロクリニック baroclinic 流体 = 圧力が密度だけでは決まらない流体）を考える。

境界面は平行な 2 平面で  $z = 0$  と  $z = h$  であるとする。境界条件は

$$v_z(z = 0) = v_z(z = h) = 0$$

である。他の成分は 0 でなくて良いとする。通例では、境界では面に平行な速度成分も 0 となるようにする（いわゆる滑り無し条件）。これによって薄い境界層を扱うことができる。境界層は、乱流において渦の源という重要な役割を持つ。しかし、境界面から離れた場所における大きいスケールの定常的な流れにおいては本質的でない。また、層流における境界層は、必要とあれば特異摂動法によっていつでも解析的に取り入れることができるであろう（例えば Simmonds and Mann 1986 ; Holmes 2013 ; 柴田 2009）。

座標系は  $z$  軸の回りに回転している、すなわち円筒座標系で  $\Omega = (0, 0, \Omega)$ ,  $\Omega \neq 0$  とする。ν 展開を行った後、NS 方程式の ν について高次の式の中に現れる速度場と圧力および密度を次のように Fourier 展開する：

$$\begin{aligned} v_{r1}(r, z) &= a_1(r)\cos(kz) + a_2(r)\cos(2kz) \\ v_{z1}(r, z) &= b_1(r)\sin(kz) \\ v_{\theta 0}(r, z) &= c_0(r) + c_1(r)\cos(kz) \\ p_2(r, z) &= \pi_{2,1}(r)\cos(kz) \\ \rho(r, z) &= \delta_0(r) + \delta_1(r)\cos(kz) + \delta_2(r)\cos(2kz) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

ここで、 $k \equiv \pi/h$  である。 $v_{r1}(r, z)$  については非圧縮性流体の場合に厳密に成り立つ  $a_0 = 0$  という近似を用いている。 $p_0$  は ν について 0 次の Euler 方程式にのみ現れる。

境界条件を与えて NS 方程式を解き、展開係数を定めることができる。図 2.3 に  $c_0$  と  $c_1$  に対する解の例を示す。これを見ると、 $v_{\theta 0}$  は  $r$  に関し単一極大関数で、かつ高所ほど小さくなる。

実際の台風は、海面（または地表面）と圏界面の二つの境界面に挟まれて存在する。 $z$  を海面からの高さとする、観測によれば  $z = 500$  m 付近までは方位角方向の風速は増加し続け、それを越えると高さとともにほぼ単調に減少する (Franklin et al. 2003)。高さにして  $z = 500$  m までの領域が境界層で、その中で風速が高さと共に増加するのは境界による摩擦効

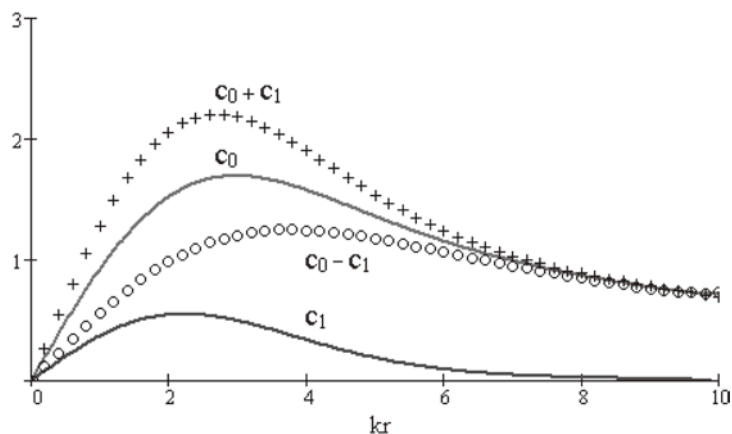


図 2.3  $c_0$  と  $c_1$  の例。  $c_0+c_1, c_0, c_0-c_1$  はそれぞれ  $z=0, h/2, h$  での  $v_{\theta 0}$ 。

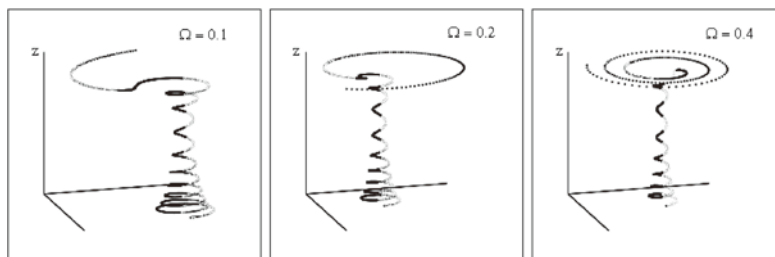


図 2.4 粒子の描く流線。薄い線は手前から向こう側へ、濃い線はその逆向きの運動を表す。高所では  $v_{\theta}$  の符号が逆転する。逆転は、 $\Omega$  が大きいほど  $r$  が小さいところで起きる。

果と考えられる。いまの計算では取り入れていないのでこれを無視すると、それ以外の部分では観測と無矛盾である。

図 2.4 に、流体中の粒子がたどる軌跡を  $\Omega = 0.1, 0.2, 0.4$  の場合について描いている。低所での流れが中高度で軸方向の速さを増しながら収束し、上部境界面付近では動径方向の速度成分を増し、また、方位角方向の速度成分を反転させる。この反転は、絶対角運動量  $r^2\Omega + rv_{\theta}$  が保存されることによる。これも実際の台風に見られる現象と矛盾していない。

### 3. $\nu$ 展開法の電磁流体力学への応用

電磁流体力学では、磁気粘性が通常流体の粘性と似た役割を演じる (von Neumann 1948)。したがって、 $\nu$  展開法は電磁流体力学でも用いることができるであろう。事実その通りで、これは、粘性反転  $\nu \rightarrow -\nu$  のもとで磁気粘性係数も同様に反転することに基づく。

この節では、電磁流体力学での $\nu$ 展開法の最も簡単な応用例を紹介する。

簡単のため電場はなく磁場は弱く、外力 $\mathbf{f}$ は Lorentz 力  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  だけとする。ここでも円筒座標系で時間依存性のない軸対称の場合を考える。NS 方程式 (1.2.1) の右辺の外力は

$$\mathbf{f} = q(v_\theta B_z - v_z B_\theta, v_z B_r - v_r B_z, v_r B_\theta - v_\theta B_r) \quad (3.1)$$

である。粘性反転のもとで NS 方程式が不変であることを要請すると

$$B_r \rightarrow B_r, B_\theta \rightarrow -B_\theta, B_z \rightarrow B_z \quad (3.2)$$

という磁場成分の変換性が得られる。

他方、非圧縮性で電場がないときの磁気粘性の方程式は磁束密度  $\mathbf{B}$  について

$$\nu_m \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (3.3)$$

と書かれる (たとえば谷 (1967b) を参照)。磁気粘性  $\nu_m$  は、真空の透磁率  $\mu_0$  と電導率  $\kappa$  を使い  $\nu_m = 1/(4\pi\kappa\mu_0)$  と表される。 $\nu_m$  の役割は NS 方程式での  $\nu$  の役割に似ている。 $\nu_m$  が小さいということは電導率が大きいということである。ここでの目的は、(3.3) を  $\mathbf{B}$  に対する磁荷無し条件

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.4)$$

の下で解くことである。(3.3) と (3.4) を定常かつ軸対称として成分を用いて表すと

$$\nu_m \left( \nabla^2 B_r - \frac{B_r}{r^2} \right) - \partial_z (v_z B_r - v_r B_z) = 0 \quad (3.5)$$

$$\nu_m \left( \nabla^2 B_\theta - \frac{B_\theta}{r^2} \right) + \partial_z (v_\theta B_z - v_z B_\theta) - \partial_r (v_r B_\theta - v_\theta B_r) = 0 \quad (3.6)$$

$$\nu_m \nabla^2 B_z + \frac{1}{r} \partial_r (r (v_z B_r - v_r B_z)) = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r B_r) + \partial_z B_z = 0 \quad (3.8)$$

である。これと先に得られた  $\mathbf{B}$  の変換性 (3.2) とを合わせて、 $\nu \rightarrow -\nu$  と同時に

$$\nu_m \rightarrow -\nu_m \quad (3.9)$$

であれば、これらの方程式は不変である。

$\mathbf{B}$  の展開は  $\nu_m$  によるとするのが自然であろうが、(3.9) のために、 $\chi_m \equiv \nu_m/\nu$  を一定として  $\nu$  による展開で表すことができる。(3.2) より、展開形は

$$\begin{aligned} B_r &= B_{r0} + \nu^2 B_{r2} + O(\nu^4) \\ B_\theta &= \nu B_{\theta1} + \nu^3 B_{\theta3} + O(\nu^5) \\ B_z &= B_{z0} + \nu^2 B_{z2} + O(\nu^4) \end{aligned} \quad (3.10)$$

となるであろう。これに伴い, Lorentz 力 (3.1) は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} &= \mathbf{f}_0 + \nu \mathbf{f}_1 + \nu^2 \mathbf{f}_2 + O(\nu^3) \\
 \mathbf{f}_0 &= q(v_{\theta 0} \mathbf{B}_{z0}, 0, -v_{\theta 0} \mathbf{B}_{r0}) \\
 \mathbf{f}_1 &= q(0, v_{z1} \mathbf{B}_{r0} - v_{r1} \mathbf{B}_{z0}, 0) \\
 \mathbf{f}_2 &= q(v_{\theta 0} \mathbf{B}_{z2} + v_{\theta 2} \mathbf{B}_{z0} - v_{z1} \mathbf{B}_{\theta 1}, 0, v_{r1} \mathbf{B}_{\theta 1} - v_{\theta 0} \mathbf{B}_{r2} - v_{\theta 2} \mathbf{B}_{r0})
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

と表される。電磁流体の方程式としては, 各次の  $\mathbf{f}$  の各成分が, (2.2.5) 以降に提示した各次の NS 方程式の各成分の右辺に現れることになる。

0 次の式は (3.6) と (3.8) より

$$\begin{aligned}
 \partial_r(v_{\theta 0} \mathbf{B}_{r0}) + \partial_z(v_{\theta 0} \mathbf{B}_{z0}) &= 0 \\
 \frac{1}{r} \partial_r(r \mathbf{B}_{r0}) + \partial_z \mathbf{B}_{z0} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

となる。以下同様にして高次の式を得る。3 次までは以下の通りである。

・ 1 次の式

$$\begin{aligned}
 \chi_m \left( \nabla^2 \mathbf{B}_{r0} - \frac{\mathbf{B}_{r0}}{r} \right) - \partial_z(v_{z1} \mathbf{B}_{r0} - v_{r1} \mathbf{B}_{z0}) &= 0 \\
 \chi_m \nabla^2 \mathbf{B}_{z0} + \frac{1}{r} \partial_r(r(v_{z1} \mathbf{B}_{r0} - v_{r1} \mathbf{B}_{z0})) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

・ 2 次の式

$$\begin{aligned}
 \chi_m^2 \left( \nabla^2 \mathbf{B}_{\theta 1} - \frac{\mathbf{B}_{\theta 1}}{r^2} \right) + \partial_z(v_{\theta 0} \mathbf{B}_{z2} - v_{z1} \mathbf{B}_{\theta 1}) \\
 + \partial_z(v_{\theta 2} \mathbf{B}_{z0}) - \partial_r(v_{r1} \mathbf{B}_{\theta 1} - v_{\theta 2} \mathbf{B}_{r0}) + \partial_r(v_{\theta 0} \mathbf{B}_{r2}) &= 0 \\
 \frac{1}{r} \partial_r(r \mathbf{B}_{r2}) + \partial_z \mathbf{B}_{z2} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

・ 3 次の式

$$\begin{aligned}
 \chi_m^3 \left( \nabla^2 \mathbf{B}_{r2} - \frac{\mathbf{B}_{r2}}{r} \right) - \partial_z(v_{z1} \mathbf{B}_{r2} - v_{r1} \mathbf{B}_{z2}) - \partial_z(v_{z3} \mathbf{B}_{r0} - v_{r3} \mathbf{B}_{z0}) &= 0 \\
 \chi_m^3 \nabla^2 \mathbf{B}_{z2} + \frac{1}{r} \partial_r(r(v_{z1} \mathbf{B}_{r2} - v_{r1} \mathbf{B}_{z2})) + \frac{1}{r} \partial_r(r(v_{z3} \mathbf{B}_{r0} - v_{r3} \mathbf{B}_{z0})) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

0 次と 1 次の式に矛盾しない非自明な解を求めてみよう。2.1 節と 2.2 節で見た境界のない単純渦解では  $v_{\theta 0}$  と  $v_{r1}$  は  $r$  だけの関数であった。ここでもこの性質は引き継がれると仮定する。すると, (3.12) は

$$\mathbf{B}_{r0} = 0 \tag{3.16}$$

かつ  $\mathbf{B}_{z0}$  は  $r$  だけの関数であることを示唆する。このとき (3.13) の最初の式は自動的に成

立する。2 番目の式は

$$\chi_m \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r B_{z0}) - \frac{1}{r} \partial_r (r v_{r1} B_{z0}) = 0 \quad (3.17)$$

となる。これは容易に解くことができ

$$B_{z0}(r) = b_0 e^{\chi_m^{-1} \int_0^r v_{r1}(r') dr'} \quad (3.18)$$

を得る。 $\nu \geq 2$  の高次の係数が 0 であれば高次の式は  $0 = 0$  の恒等式になる。結局 (3.18) は (3.3) の解の一つである。単純渦であれば、 $v_{r1}$  が  $r \rightarrow \infty$  で負で  $B_{z0}$  は全領域で有限である。 $\chi_m$  の大小によって、磁場の動径方向の広がりりと速度場の広がりに食い違いが生じる ( $\chi_m$  が大きいほど磁場の広がりの方が大きくなる)。

$B_{\theta 1}$  は  $\nu$  の 2 次の式から決まる。すなわち、(3.14) より

$$\chi_m^2 \left( \nabla^2 B_{\theta 1} - \frac{B_{\theta 1}}{r^2} \right) - \partial_r (v_{r1} B_{\theta 1}) - \partial_z (v_{z1} B_{\theta 1}) = 0$$

$v_{r1}$  と  $v_{z1}$  は NS 方程式の 2 次の式から決める。具体的には、(3.2.9), (3.2.10), (3.11) より

$$v_{r1} \partial_r v_{r1} + \frac{\partial_r \phi_2}{\rho} = \nabla^2 v_{r1} - \frac{v_{r1}}{r^2} - q v_{z1} B_{\theta 1} \quad (3.19)$$

$$v_{r1} \partial_r v_{z1} + v_{z1} \partial_z v_{z1} + \frac{\partial_z \phi_2}{\rho} = \nabla^2 v_{z1} + q v_{r1} B_{\theta 1} \quad (3.20)$$

これは、Burgers 渦に対応する解

$$\begin{aligned} v_{r1} &= -kr \\ v_{z1} &= 2kz \\ B_{\theta 1} &= br \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\frac{\phi_2}{\rho} = -\frac{k^2}{2} r^2 - 2k^2 z^2 - qkbr^2 z$$

を持つことが容易にわかる。 $b$  は任意の定数である。(3.18) と (3.21) は

$$B_{z0}(r) = b_0 e^{-(k/2\chi_m)r^2} \quad (3.22)$$

を意味する。 $B_{z0}$  と  $B_{\theta 1}$  が共に 0 でないとき、磁力線は螺旋を描く。螺旋のピッチは  $r$  が大きくなると小さくなる。

最後に残ったのは  $v_{\theta 0}$  は (2.1.3) と (3.11) で定めることができる。 $z$  依存性が無いとして、解くべき方程式は

$$\frac{v_{r1}}{r} \partial_r (r v_{\theta 0}) = \nabla^2 v_{\theta 0} - \frac{v_{\theta 0}}{r^2} - v_{r1} B_{z0} \quad (3.23)$$

である。これは  $X \equiv r v_{\theta 0}$  とすると

$$X'' - \left( v_{r1} + \frac{1}{r} \right) X' = r v_{r1} B_{z0} \quad (3.24)$$

となるので容易に解くことができ

$$X' = e^{b^s(v_{r1}(r)+\frac{1}{r})dr} \int_0^r s v_{r1}(s) B_{z0}(s) e^{-b^s(v_{r1}(r)+\frac{1}{r})dr} ds \tag{3.25}$$

または (3.18) より

$$\int_0^r v_{r1}(r') dr' = \chi_m \ln(B_{z0}/b_0) \tag{3.26}$$

を用いて最終的に

$$v_{\theta 0}(r) = \frac{\chi_m^2}{1-\chi_m} \frac{b_0}{kr} (1 - e^{-(k/2\chi_m)r^2}) \tag{3.27}$$

を得る。これはまさに Burgers 渦の  $v_{\theta}$  と同型である。 $v \rightarrow 0$ ,  $v_m \rightarrow 0$  ( $\chi_m = \nu_m/\nu$  を固定) の極限で,  $v_r$ ,  $B_{\theta}$  は 0 になる。 $v_{\theta}$  と  $B_z$  が有限に残るが, これらの振る舞いは  $v_{r1}$  によって決まる。これが電磁流体力学におけるチェシヤ猫効果の例である。ここで求めた解に対応する磁力線と  $v_{\theta}$  のようすを図 3.1 に示す。軸から離れるほど磁力線の螺旋ピッチは小さくなる。

(3.12) 以降の方程式系において, これ以外にどのような解が存在するかは興味ある問題である。

#### 4. 台風概観

我々の最終目的は, これまでに得られた単純渦の知識を基に, 台風の性質をどこまで理解できるかを調べることである。そのために, まず台風の観測上の性質を整理しておく。

台風は, 主に風と雲と雨からなる, 平たい円柱状の巨大な塊である。この節では, 北半球で生成する台風の基本性質をまとめる。台風の誕生・発達・移動についても長い調査研究の歴史があるが, 以下では必要に応じて簡単に触れるに留める。

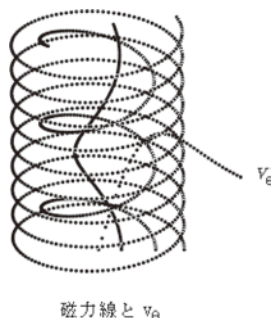


図 3.1 Burgers 渦中の磁力線と  $v_{\theta}$



#### 4.1 風

風は、大部分の領域で外部から内部に向かい反時計回り（特に断らなければ、台風を上から見下ろしたときの風向きである）に吹き込む。その原動力は、外部と内部の気圧差である。最も気圧が低い部分を台風の‘中心’という。風速は半径 20 km 前後、高度 500 m 前後の所で最大になり、それより大きいところでは中心からの距離  $r$  とともに減少する。全体的な傾向として、渦巻きながら上昇し圏界面近くで外部に吹き出す。吹き出す向きは、 $r$  が小さいときは反時計回り、 $r$  が大きくなると時計回りとなる。このような風の向きを決めるのは地球の自転である。

風速がある基準値（ $\sim 17$  m/s）に等しくなる線が囲む最も大きな領域でその台風の大きさを定めることができる。台風の大きさは、最大風速または最低気圧で測る台風強度(intensity)とは強い関係性はない（Merrill 1984）。

強い上昇気流があるところ—降雨帯—では雲が生じ雨が降る。

#### 4.2 目

強い台風では、中心から半径 10~30 km の範囲には高い雲は無く風は弱い（図 4.1）。その領域を目という。中心付近では弱い下降気流がある。目の形はほぼ円形または楕円形、時に多角形である。多角形に見えるのは、目の中にさらに小さな渦が数個円周上に並ぶからである（Lewis and Hawkins 1982, Muramatsu 1986）。目のすぐ外側で風速は最大になる。台風の勢力が強くなると共に、目は縮む。

気圧は中心で低く周辺部で高い（Fujita 1951）。温度は、高々度で周囲より 10~15°C 程度高く、低高度で低い。

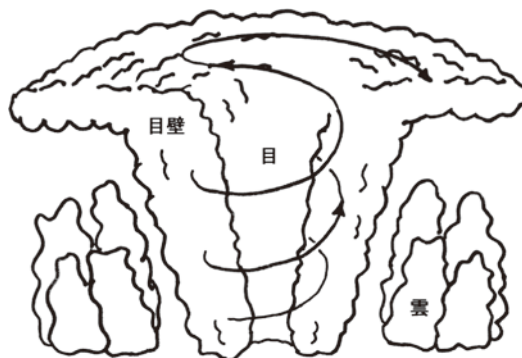


図 4.1 台風の目とその周辺の模式図。矢印線は目壁内の風の流れ。

### 4.3 雲と雨

目のすぐ外側には高い積乱雲が生じ、目を壁のように取り巻く。これを‘目（の）壁’と呼ぶ。目壁雲の厚さは数 10 km、高さ 15 km 程度で、水平向きに数 10 m/s、上向きに 10 m/s 程度の上昇気流があり、上部で横にしばしば螺旋状に数 100 km まで広がり、強い雨を降らせる降雨帯を形成する。降雨帯の寿命は 1 日程度である。

湿った空気が上昇し、水滴の凝結により潜熱を放出し、雲をつくり雨を降らせる。暖まった空気は軽くなりさらに上昇し気圧を低く保つ。周囲の高圧部分からは、この低圧部分に常時湿った空気が補充される。雲と雨は、台風が熱エネルギーを生成していること目の目印である。

### 4.4 暖気核

台風は暖かい。台風の中で、高度 10 km 前後、気圧 300 hPa 前後、半径 100 km 以内の、目壁の半径を超えた領域に、周囲より 10 数 °C 程度気温が高い部分が存在する (Hawkins et al. 1968)。模式図を図 4.2 に示す。弱い台風では、暖気核は低い場所につくられる (Halverson et al. 2006)。

### 4.5 二次目壁 (secondary eyewall) または双目 (double eye)<sup>5</sup>

初めにあった目壁の外側にもう一つ目壁ができることがある (Fortner 1958)。この二次目壁は、時間と共にその風速を増し半径を減少させる。同時に内側の目壁は縮小し消滅する。三次目壁ができることもある。1997 年から 2007 年の間の調査によれば、最大風速 60m/s 以



図 4.2 等温線で表した暖気核の模式図。等高線は、各高度での平均温度からのずれを表す。目の中心から半径 200 km 程度の範囲を示す。

<sup>5</sup> ‘双目’はマスコミ報道で使用され広まった。実際には、雲がある領域と雲のない領域が同心円状に配置し、目が二つ並んでいるわけではないので、‘双目’は誤解を招きやすい (Jordan et al. 1961)。

上の強い台風で二次目壁が現れる頻度は以下の通りである (Hawkins and Helveston 2008)。

北半球西太平洋	東北半球太平洋	大西洋	南半球
81%	9%	16%	18%

#### 4.6 非対称性

台風は、目の中心を通る鉛直軸に関してほぼ回転対称的であるが、よく見れば非対称であったり、明らかに著しい非対称が認められる場合も多い。台風は、誕生後北西に向かって進んだり、進路に沿ってふらふら運動をすることがある (Nolan and Montgomery 2000) のは、この非対称性によるものと考えられる。非対称性が弱まり対称化するとき、台風は強度を増す。

#### 4.7 エネルギー

台風のエネルギーは莫大である。それを見積もってみる。

大気の単位質量当たりのエネルギー  $E$  は、運動エネルギー  $K$ 、位置エネルギー  $U$ 、熱エネルギー  $Q$  の和で表される。 $Q$  はさらに、温度で決まる熱容量とその温度における水蒸気の凝結時に放出される潜熱との和で表される。すなわち

$$E = K + U + Q,$$

$$Q = c_p T + L_h q_m,$$

$c_p$  は定圧比熱、 $T$  は絶対温度、 $L_h$  は潜熱、 $q_m$  は比湿 (水蒸気密度の全空気密度に対する比) である。右辺第 1 項は暖気核からの寄与を考えればよい。それぞれのエネルギーの見積もりは以下の通りである。

運動エネルギー：台風の半径を  $R \sim 200$  km、高さを  $H \sim 15$  km、平均密度を  $\bar{\rho} \sim 1$  kg/m<sup>3</sup>、平均風速を  $\bar{v} \sim 30$  m/s として

$$k \sim \frac{1}{2} \bar{\rho} \pi R^2 H \bar{v}^2 \sim 10^{15} J$$

位置エネルギー：重力の加速度を  $\bar{g} \sim 9$  m/s<sup>2</sup> として

$$U \sim \bar{g} \bar{\rho} \pi R^2 \frac{H}{2} \sim 10^{13} J$$

熱エネルギー：暖気核は小さいので潜熱で代表させる。水 1 kg 当たりの放出潜熱を  $L_h \sim 2000$  J、平均の比湿を  $\bar{q}_m \sim 0.02$  とすると

$$Q \sim \bar{\rho} \pi R^2 H L_h \bar{q}_m \sim 10^{16} J$$

$R$  として降雨帯の大きさを採用すればさらに一桁ほど大きくなる。 $1J = 1Ws = 10^{-3}kW = 3 \times 10^{-7} kWh$  であるから、台風が常時保持するエネルギーは  $10^9 kWh$  よりも大きいことになる。なお、日本の全産業が 1 日に消費する電力はおよそ  $10^9 kWh$  である（総務省統計局 2014）。

台風がその内部で生成し続けている（したがって散逸し続けている）エネルギーは、保持しているエネルギーとは別物である。台風のエネルギー源は、水蒸気が上昇して液体に相転移するときに放出される潜熱である。その割合  $W_L$  は、気流の平均上昇速度を  $\bar{v}_z \sim 5 m/s$  としておよそ

$$W_L \sim \rho \pi R^2 \bar{v}_z q_m L_h \sim 10^{10} kW$$

程度と見てよいであろう。これは 100 万 kW の発電所 1 万基に相当する。台風のエネルギーを他のシステムのそれと比較するために、さまざまなエネルギー源のサイズとエネルギー生成率の相関の概略を図 4.3 に示した。

#### 4.8 エントロピー

系の無秩序さの程度を表す目安となるエントロピーを見積もってみる。台風による熱変異を  $10^{16} J$  程度とすると、それに対応するエントロピー変異は

$$S_a \sim \frac{10^{16} J}{300K} \sim 10^{14} J/K$$

である。このほとんどは、台風を形作る風と雨を介する循環によって大気と海洋内に再配分される。

地球外に放出されるエントロピー変異は、圏界面の温度変異によるとして良いであろう。それは 4.4 で述べた「暖気核」の温度変異の分布で決まる。非常に大まかに見て、台風の上部での平均温度変異を  $5^\circ C$ 、その範囲を中心から半径 100 km としよう。その領域からの黒体放射は Stefan-Boltzmann 則により  $\sigma(T_t + 5^\circ C)^4 \times \pi(100 km)^2$  である。 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W/m^2/$

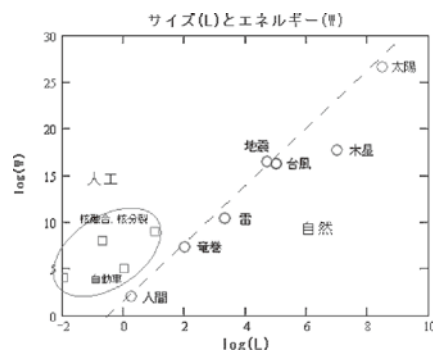


図 4.3 エネルギー源のサイズ  $L$  ( $[L]$ ) とエネルギー生成率  $W$  ( $[W]$ ) の相関。

$K^4$  は Stefan-Boltzmann 定数,  $T_t \sim 220^\circ\text{C}$  は台風がないときの圏界面の温度である。よって, 放出エントロピーの台風による 1 日  $\sim 9 \times 10^4$  秒当たりの変異  $\Delta S_t$  - 台風によって地球外に余分に捨てられるエントロピー - は,

$$\begin{aligned} \Delta S_t &\sim 6 \times 10^{-8} [(220+5)^3 - 220^3] \times \pi \times 10^{5 \times 2} \times 9 \times 10^4 \\ &\sim 1 \times 10^{14} \text{J/K} \end{aligned}$$

のオーダーとなる。これは台風全体が常時保持する総エントロピーと同程度である。

ちなみに, 発電量 100 万 kW の原子炉の場合, 相当する 1 日のエントロピー生成量  $\Delta S_n$  は, 燃料棒の中心が  $2000^\circ\text{C}$ , 排熱率が 200 万 kW として

$$\Delta S_n \sim \frac{200 \times 10^9}{2000 + 273} \times 8 \times 10^4 \sim 8 \times 10^{12} \text{J/K}$$

である。原子炉に限らず, 技術が生成するエントロピーは大気圏内に放出されるのに対し, 台風はそれに比肩する量のエントロピーを大気圏外に放出するという特徴がある。

#### 4.9 Reynolds 数

台風の Reynolds 数  $Re = UL/\nu$  は,  $U \sim 20 \text{ m/s}$ ,  $L \sim 5 \times 10^5 \text{ m}$  とすると  $10^{12}$  となり大変大きい値となる。実験室で実現できる  $Re$  は,  $U$  として空気中の音速を用いたとしても高々  $10^9$  くらいである。ちなみに, 竜巻もこの程度である。

NS 方程式によれば,  $Re$  が同じ流れの形は互いに相似である。サイズが大きい流れの様子は, サイズが小さく速度が大きい物体の周りの流れと似ているということである。竜巻は台風よりは旅客機の後方にできる渦 ( $Re \sim 10^9$ ) に近い現象といえるかもしれない。

### 5 渦の安定性と台風

#### 5.1 線形摂動

第 2 節で見たように, Burgers 渦と Sullivan 渦は互いに無関係ではなく, それ以外の無限の解の系列があって, Burgers 渦と Sullivan 渦はその中の特殊な例に過ぎない。渦の系列はエネルギーの系列でもあるので, その系列に沿って渦はエネルギーを連続的に増加・減少させることができる。すなわち, これらの解はエネルギー的に不安定であり, エネルギーの供給が止まればどの渦も動径方向の配位を変えることで崩壊する。これはいわば位相幾何学的不安定性である。エネルギーを供給されつつあるときに台風の目が縮む, あるいはエネルギーの供給を絶たれた台風が目の輪郭を失いながら衰えていく過程に対応しているように見える。ここでは, 摂動が渦の配位を動力的に変える模様について述べる (Takahashi 2013)。

大気的不安定は気象が変化する要因として最も重要なものである。台風が生まれるのも不安定性による。その機構を探求したものに、Charney and Eliassen (1964), Ooyama (1964, 1966) 他在先駆的な仕事がある。それによれば、台風が生まれるのは、湿った大気が暖められて上昇し上空で水蒸気を凝結させて潜熱を放出しそれによって暖められた乾いた空気が膨張してさらに上昇すること（積雲、積乱雲の柱がある低気圧の中の不安定性）、および水面近くの水蒸気を含んだ大気が低気圧の中心に向かって定常的に流れ続けること（海面近くの流れの安定性）、の二つが可能になるときである。これらの条件は CISK (Conditional Instability of the Second Kind) と呼ばれ、台風の生成と維持についての主流的な考え方になっている。CISK には、海面との摩擦による大気流の運動量減少が、流れを渦中心に収束させて台風の強度を増すための重要な因子として取り入れられる。他方、この点を批判的に検討した仕事に Craig and Gray (1996) のものがある。彼等のシミュレーションによれば、台風の強化に効率的に寄与するのは、海面との摩擦よりは海面から供給される湿度が引き起こす正のフィードバックである。このメカニズムは WISHE (Wind Induced Surface Heat Exchange) と呼ばれる。いずれの場合でも、そもそもの始まりは、暖かい海水域の上に低気圧が生じることでありとされる。同じ低気圧でも、温帯域では寒気団と暖気団の接触から生じると対照的である。

2次元渦の線形安定性は Walko and Gall (1984) によって数値的に調べられ、安定及び不安定モードが見出されている。特に、 $n = 1$  の非軸対称モードに関しては、Smith and Rosenbluth (1990) が Lyapunov 不安定ではなく巾不安定な積分表示の‘厳密’解を与えた。Smith and Rosenbluth (1990) の解はプラズマを想定したものだったが、Montgomery and Kallenbach (1997) はそれを台風の動的性質を解析するのに利用した。ただ、渦の安定性は空間次元とモードに強く依存するので、現実には即した分析は3次元モデルに依らなければならない。Noland and Montgomery (2002) は、形態的に強い台風・弱い台風・熱帯低気圧を想定した3次元渦（ただし  $Re \sim 10^5$  程度）の線形安定性を調べ、強いものほど不安定の傾向が強くなるという結果を得ている。彼等は、Coriolis 力は考慮するが密度は時間的に変動しないという近似を採用した。Coriolis 力が存在する場合の無粘性渦の動力学的安定性は McWilliams 他 (2003) によっても調べられている。彼等は、非線形部分は方位角方向の平均で置き換えながら‘擬’線形方程式を解き、時空間に依存する摂動—Rossby 波—の近似的局所分散関係を得た。

ここでは、線形摂動の考え方を紹介する。Reynolds 数は十分大きい渦に対し、Coriolis 力は無く、かつ摂動は十分小さいとして非線形部分を見捨てる。時間に依存しない固有値方程式を解く。こうして、空間だけに依存する分散関係を厳密に決定することができる。

できるだけ状況を単純化する。まず、無摂動では密度  $\rho$  は一定、渦は軸対称とする。また重力も 0 とする。次に、 $\nu$  展開法で無粘性の極限をとり、出発点の場の配位として

$v_\theta = v_{\theta 0}$  だけを残す。これは鉛直方向の2次の循環を無視した, Noland and Montgomery (2002) の‘非対称ハリケーン方程式’を粘性項を無視して扱うことを意味する。ただし,  $v_\theta$  は  $r$  だけの関数とする。そして, これが小さな摂動  $\delta \mathbf{v}$  だけ変化したときに何が起きるかを調べるのである。 $\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}$  を  $\nu = 0$  の NS 方程式 (すなわち Euler 方程式) に代入して線形化すると

$$\left(\partial_t + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta\right) \delta v_r - \frac{2v_\theta}{r} \delta v_\theta = -\frac{1}{\rho} \partial_r \delta p + \frac{v_\theta^2}{\rho r} \delta \rho \quad (5.1.1)$$

$$\left(\partial_t + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta\right) \delta v_\theta + \left(\partial_r v_\theta + \frac{v_\theta}{r}\right) \delta v_r = -\frac{1}{\rho r} \partial_\theta \delta p \quad (5.1.2)$$

$$\left(\partial_t + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta\right) \delta v_z = -\frac{1}{\rho} \partial_z \delta p + \frac{\partial_z p}{\rho^2} \delta \rho \quad (5.1.3)$$

$$\left(\partial_t + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta\right) \delta \rho + \rho \left(\frac{1}{r} \delta v_r + \partial_r \delta v_r\right) + \frac{\rho}{r} \partial_\theta \delta v_\theta + \rho \partial_z \delta v_z = 0 \quad (5.1.4)$$

を得る。 $\delta \rho, \delta P$  は密度と圧力の摂動である。最初の式で,  $f_r = 0$  として無摂動の量に対する, 遠心力と気圧傾度の釣り合い関係

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \partial_r p \quad (5.1.5)$$

を用いている。4番目の式は, 連続の式の摂動による変分から導かれるものである。 $f_\theta$  と  $f_z$  に対する摂動も無いと仮定している。

摂動成分  $\delta v, \delta p, \delta \rho$  が  $\exp[i(n\theta + kz - \omega(t - t_0))]$  という因子を共通に持つと仮定しよう。 $\theta$  は方位角,  $t$  は時間,  $n$  は整数,  $k$  と  $t_0$  は任意の定数である。このとき0でない摂動が存在するためには, 摂動の振幅は  $\delta v, \delta p$  に関しては  $t$  依存性無し,  $\delta \rho$  については  $t$  の1次関数, かつ, 振動数  $\omega$  が固有値方程式

$$\xi^4 - 4\xi^2 - 4n\xi - (kr)^2 - n^2 = 0 \quad (5.1.6)$$

$$\xi \equiv \frac{r}{v_\theta} \omega - n \quad (5.1.7)$$

を満たさねばならないことがわかる。これは4次の代数方程式で, 一般に正負2つの実根と2つの複素数根を持つ。(5.1.6) は  $k$  が複素数でも成り立つ。このモデルの特徴は, 固有値を  $n$  と  $kr$  の関数として厳密に決定できることである<sup>6</sup>。以下で, 小さい  $n$  について, 何が起きるかを見てみよう。

### 1] $n = 0$ : 円環状の摂動

固有値方程式の解は

<sup>6</sup> もちろんこれは状況を単純化したためである。例えば, 一様重力を取り入れて  $f_z$  を定数とすると, 固有値方程式は6次の代数方程式となることを示すことができる。

$$\omega = \pm \frac{v_\theta}{r} \sqrt{2 \pm \sqrt{4 + (kr)^2}} \quad (5.1.8)$$

となる。特筆すべき事は

i 角振動数  $\omega$  は  $r$  の関数である。

ii  $k = 0$  なら  $\omega = 0$  または  $\pm 2v_\theta/r$ .

iii  $k$  が実数で  $k \neq 0$  なら  $\omega$  は実数  $\pm(v_\theta/r)\sqrt{2 + \sqrt{4 + (kr)^2}}$  または虚数  $\pm i(v_\theta/r)\sqrt{\sqrt{4 + (kr)^2} - 2}$  となる。前者の場合、 $r$  が小さいところで  $\omega \sim \pm 2v_\theta/r$ 、大きいところで  $\omega \sim \pm kv_\theta$  のように、また後者の場合、 $r$  が小さいところで  $\omega \sim \pm ikv_\theta/2$ 、大きいところで  $\omega \sim \pm ikv_\theta$  のように振る舞う。虚数解は、摂動の指数関数的増大または減衰を表す。

iv  $k$  が純虚数なら  $r > 2/|k|$  で  $\omega$  は複素数になる。

$\omega = 0$  の自明なモード以外は、いずれの場合も、 $|\omega|$  は遠方で  $v_\theta/\sqrt{r}$  のように減少する関数である。したがって、 $(t - t_0)\omega$  が一定となるのは  $t \rightarrow t_0$  のときは  $r$  が遠方から 0 の方向に近づくことによって、 $t_0$  を過ぎて  $t \rightarrow \infty$  のときは  $r$  が  $+\infty$  に向かって大きくなる方向に変化するときである。摂動の位相変化もこれに従って起きることになる。すなわち、軸対称の摂動は、それが遠方で生じたときは初め渦中心に向かって、次いで渦中心から離れる向きに移動する。

## 2] $n = 1$ : 半円状の摂動

固有値方程式は代数的に解けるが一般には複雑である。 $k$  が実数のときの解の傾向を挙げると

i  $k = 0$  に対し、

$$\omega = \frac{v_\theta}{r}(\xi + 1), \xi = -1, 1 \pm \sqrt{2}$$

ii  $0 < kr < 0.300283$  に対し 4 つの実根、 $kr > 0.300283$  に対し正負 2 つの実根と 2 つの複素数根を持つ。 $kr$  が十分大きいときは

$$\omega \approx \pm \sqrt{\frac{k}{r}} v_\theta, \pm i \sqrt{\frac{k}{r}} v_\theta$$

のように振る舞う。摂動は  $n = 0$  のときと同様、動径方向に動く。固有値が複素数なので、中心方向に増大（減衰）しながら移動し、次いで中心から遠ざかる方向に減衰（増大）しながら移動する。

## 3] $n \geq 2$

この場合は、全ての  $kr > 0$  に対して  $\omega$  は虚部を持つ。摂動はすべて、指数関数的に増大または減衰しながら 1], 2] と同様に位相速度を持って動径方向に移動する。



$\delta v_r, \delta v_\theta, \delta v_z$ のすべてが同じ  $\omega$  で振動する。したがって、 $z$  方向の流れにも摂動の移動が起きる。上昇下降気流の変動も同位相の波となって動径方向に移動することになるので、変動が十分強い台風の場合はそれが雲と晴れ間の存在によって視認できる第2（または第3）目壁となって観測されることになるだろう。

## 5.2 台風の同心円状目壁構造

### 5.2.1 観測

二つ以上の目壁が同心円状に作られることの最初の報告は Fortner (1958) によってなされている。これは、アメリカ空軍の偵察機を用いた観測飛行の結果の報告である。偵察飛行による観測の主要な目的は高度を保ちながら目の中に入ることで、危険を伴うものであるが、台風の3次元構造を知るための貴重なデータを提供してくれる方法として、現在も行われている。

Fortner (1958) によれば、1956年の台風観測は次のように行われた。装備は、校正圧力高度計、電波高度計、乾湿温度計、レーダー、パラシュート投下ゾンデ、である。暴風雨域を飛ぶときは高度450 mを保ち、帰路では気圧700 mbを保つようにする。目への進入は、原則として気圧700 mbを保って行われ、目の中でのゾンデ投下も最低気圧が700 mbのところで行なわれる。中心の位置を決定した後、飛行機は風速25 m/s以上の所を取り巻くように反時計回りに飛ぶ。

海面気圧は、高度450 mを飛行中の飛行機では0.1 mb単位で、また投下ゾンデでは1 mb単位で測定された。700 mbの高度は校正圧力高度計と電波高度計を用いて決定された。台風の経路と風速は3月24日から4月2日まで記録されている。

後に Sarah と命名された熱帯低気圧は3月21日に閉じた気流循環を形成、3月24日に中心から24 kmで最大風速90 m/sを、また中心気圧937 mbを記録した。観測者が二重目壁 (an eye within an eye) を見たのはこの時である。目への進入は、激しい乱流と降雨についてなされた。激しい降雨のために、エンジンの一つはシリンダーヘッドの温度が100°Cも下がりバックファイアを起こすほどであった。

このような観測飛行を繰り返し、また気象衛星が利用できるようになって、いまでは二重（または多重）目壁は全台風の数パーセントに現れることがわかっている。（台風の二重眼壁の研究はアメリカ合衆国で精力的になされてきた。なお、アメリカでは、1分間平均で最大風速が33 m/s以上の熱帯性低気圧を台風と呼ぶ。）傾向は台風の強さ毎に違って、最大風速が > 65 m/s（スーパー台風）では約半数に、< 65 m/s では約10%に二重目壁が現れている。いくつかの例を表1に示す。

表 1. 2 次目壁を有する主な台風

台風名	$v_{\max 1}$	$P_c$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$v_{\max 3}$	文献
Sarah 1956	90	940	6	28	16	44	Fortner (1958)
Beulah 1967	70	940	11	67	30		Hoose et al. (1967)
Gloria 1974	60	937	7.5	56	37		Holliday (1977)
Anita 1977*	60	930	20	50	10	70	Willoughby et al. (1982)
David 1979	80	925	20	50	20	45	Willoughby et al. (1982)

\*: Anita の外側 2 次目壁は形成時 180° の弧状だった。

$P_c$ : 中心気圧 (hPa),  $R_1, R_2, R_3$ : 内側目壁消滅後の目壁半径 (km),  $v_{\max 1}$ : 内側目壁の最大風速 (m/s),

$v_{\max 3}$ : 内側目壁消滅後の最大風速 (m/s)

多重目壁構造の特徴の要点は

- ・最初にあった目壁 (1 次目壁) の外側に 2 次目壁がほぼ同心円上に形成される。
- ・通常, 2 次目壁は次第に内側に移動すると共に風は強くなる。
- ・最終的には 1 次目壁と合体し, 目壁は 1 つになる。
- ・2 次目壁は, 目が海上にある間に, あるいはまれに島の上を通過したときに形成される。

### 5.2.2 二重目壁構造の原因

無粘性近似による安定性解析で既に見たように, 無境界軸対称渦は基本的にすべて不安定である。境界がある場合については, 5.1 で述べた方法による数理解析はまだ行われていないが, Noland and Montgomery (2002) の研究から推せばやはり同様に不安定であることが予想される。熱エネルギーを供給し続ける種がありさえすれば, 摂動は二重目壁構造を成長させるように作用するであろう。成長した摂動は, 2 次目壁となり動径方向に (遠方のは中心に向かって) 移動する。 $n = 0$  モードは横断面が円環状の,  $n = 1$  モードは半円状の目壁となって見えるだろう。エネルギーの供給が滞れば減衰モードが残り, 最後には消滅する。

摂動の種を生む要因としては, 上空に現れる点状または円環状の熱源によって生まれた対流環 (Shapiro and Willoughby 1982), 地形を含む一般的な地表摩擦や地表の地形の影響 (Hawkins 1983), 熱帯低気圧が台風になる直前に, 波動となって低気圧中心に向かう気流の乱れの影響 (Molinari et al. 1985), 対流を起こしやすい  $\beta$ -スカート (目の外側で渦度勾配が有限の領域) の存在 (Terwey and Montgomery 2008), 海洋-大気間の強い風を媒介した熱交換 (Nong and Emanuel 2003), などが考えられている。

いろいろなものが複合して多重眼壁の種となることもあるだろう。二重目壁ができる原

因が分かれば、気象予報と災害予測には大いに役立つはずである。しかし、個々の台風でそれらを特定することは、観測上の制限から難しい。当面は、数値モデルをもとに計算機上のシミュレーションによって可能なパターンを選び出す研究に頼ることになる。

## 6. 渦の熱的性質と台風

### 6.1 Burgers 渦の熱的性質

NS 方程式の解としての渦は、流れの速度場が時間と空間の関数として与えられることで数学的に記述される。解析的方法によってこれまでに多くの解が見つかっている。また、進歩した数値解法によって、渦生成を介したエネルギーカスケードを伴う乱流もある程度自在に扱うことができるようになった。

時間変化の無い定常的な渦解も知られている。しかも、第3節で見たように、定常解は粘性がある場合も存在する。粘性はエネルギーを散逸させるので、それを補う物理的要素があるはずである。その要素として最も重要なものが熱である。プラズマでは、熱以外に電磁場も一定の役割を担うであろう。このような要素は、NS 方程式を扱うだけでは見えてこない。

気象に話を限れば、主として外部との熱のやりとり（顕熱）、外部からの力学的仕事が、流体要素のエネルギーを変化させる。それは任意の空間領域に関する積分を使い次のように表すことができる（谷 1967a）：

$$\frac{d}{dt} \left( K + U + \int \rho Q d\tau \right) = W_1 + W_2 + W_3 \quad (6.1.1)$$

左辺は順に、流体小部分の運動エネルギーの変化の割合  $\int \rho v_a (dv_a/dt) d\tau$ 、位置エネルギーの変化の割合  $\int \rho f_a v_a d\tau$ 、熱エネルギーの変化の割合の和を、右辺は、流体部分に働く応力によってなされる仕事、外力によってなされる仕事、流体部分に流入する熱量の和である。（谷（1967a）は左辺に位置エネルギーを取り入れていないが、ここではそれを明示的に取り入れている。）流体の境界に変化がないとすると、全位置エネルギーの変化は密度  $\rho$  の変化を通してのみ生じる。

$W_{1,2,3}$  はそれぞれ

$$W_1 = \int v \cdot p \cdot d\sigma \quad (6.1.2)$$

$$W_2 = \int \rho v \cdot f d\tau \quad (6.1.3)$$

$$W_3 = \int \lambda \nabla T \cdot d\sigma \quad (6.1.4)$$

である。ここで、 $p$  は応力テンソル

$$p_{\alpha\beta} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu\lambda\nabla\cdot v\right)\delta_{\alpha\beta} + \mu(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) \quad (6.1.5)$$

$f$  は外力,  $\lambda$  は熱伝導係数,  $d\sigma$  は向き付けされた面積要素である。相転移はなく, 熱量は温度と定圧比熱  $c_p$  を使って  $dQ = c_p dT$  で関係づけられるとする。また, 簡単のために流体は非圧縮性とする。このとき, 上の式から

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + \rho f_\alpha v_\alpha = p_{\alpha\beta} \partial_\beta v_\alpha + \partial_\beta (\lambda \partial_\beta T) \quad (6.1.6)$$

を得る。( (6.1.1) で, 全エネルギーに位置エネルギーを明示的に取り入れた効果が, 左辺の第 2 項として現れている。詳細は補足を見よ。) これが流体内部の温度分布を決める式である。一般には移流項を含めて  $dT/dt = \partial_t T + v \cdot \nabla T$  であるが, 定常状態であれば  $dT/dt = v \cdot \nabla T$  となる。

エントロピー  $S$  は

$$dQ = TdS \quad (6.1.7)$$

として定めることができる。特に,  $dQ = c_p dT$  であれば

$$S = c_p \ln(T/T_0) \quad (6.1.8)$$

( $T_0$  は定数) と, 温度  $T$  を用いて表すことができる。

(6.1.6) で, 速度場と圧力と境界条件, およびパラメータ  $c_p$  と  $\lambda$  を与えれば温度が決まる。Burgers 渦について, 外力  $f$  は無視し, また, 境界条件は  $z = 0$  の目の中心 ( $r = 0$ ) で  $T=300$ ,  $dT/dz=0$  とし,  $r = 0$  で正則なものを探した。その内部の温度分布の例を図 6.1 に示す。(数値計算の詳細は他でおこなう。) Burgers 渦解のパラメータを  $k$  とすると Burgers 渦の動径方向の変化を表す特徴的な長さ  $d_B$  は  $1/\sqrt{k}$  である。このとき, (5.6) で決まる温度変化の特徴的な長さは

$$d_T = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho\nu c_p}} d_B \quad (6.1.9)$$

で与えられる。右辺の無次元数  $(\lambda/\rho\nu c_p)^{1/2}$  は, 大気の場合 10 程度である。図 6.1 の横軸には, 無次元化した  $r/d_T$  を用いている。

目壁の中は中心より約 0.5, 周辺 (図の右端,  $r = 73632$ ) より約 2.2 だけ温度が高くなっている。台風が誕生するためには, あるいは台風が維持されるためには, 内部に局所的に暖かい場所が存在することが必要であること (Riehl 1950), 目壁内部が台風の熱源になっているという標準理論の主張と矛盾がない (Charney and Eliassen 1964, Ooyama 1964, 1966)。

温度分布を見ると, 中心部分で暖められた流体の固まりが対称軸を取り巻いていることがわかる。対称軸から少し外れた所にある風速最大領域が最も温度が高い。おおまかな傾向

として、中心軸から離れるほど、また低所ほど温度が高いといえる。エントロピーもほぼこれに対応していると考えられる。Burgers 渦では全体的に向心流と上昇流があることを思い出すと、この結果は、 $z = 0$  の境界面から供給されるエントロピーを向心流が中心部に集め、上昇流によってより高所に運び、目外部の領域のエントロピーをより低く保っていると解釈できる。

渦の各点の温度が、その点と同じ高さでの平均温度

$$T_{av}(z) = \frac{2}{R^2} \int_0^R T r dr$$

からどのようにずれているかを  $\Delta T = T - T_{av}(z)$  の等高線プロットで示しているのが図 6.1 の右上の図である。渦の中心上部に暖気異常が存在しているのが分かる。これは、台風で実際に観測される暖気核に近い構造である (Hawkins et al. 1968, Halverson et al. 2006)。

## 6.2 二境界渦の熱的性質

2.4 節で、二つの平行な境界面に挟まれた領域で、単純渦をどのように構成するかを見た。境界層を除けば、流れのパターンは台風のそれを定性的に再現しているので、最後にこの渦解の熱的性質を調べておこう。

速度場として (2.4.1) の関数形を仮定し、解として図 2.3, 2.4 に示されているものを取り上げ、その温度分布を求める。温度分布を

$$T(r, z) = \tau_0(r) + \tau_1(r) \cos k_1 z + \tau_2(r) \cos k_2 z \quad (6.2.1)$$

と Fourier 展開する。ここで、 $k_n \equiv \pi n/h$  である。実際の台風は海面近くの水温が周辺より高い所に生まれることを反映し、誕生時は中心部は周辺よりも温度が高く、かつその状態が発

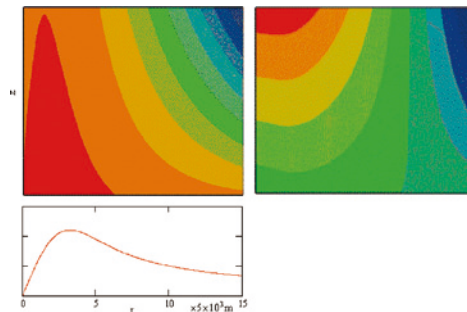


図 6.1 上左: Burgers 渦の温度の等高線プロット。横軸  $r$ , 縦軸  $z$ 。上右: 温度変位  $\Delta T = T - T_{av}(z)$  の対称軸を含む面内の等高線プロット。濃い赤が最高温領域, 濃い青が最低温領域に対応。(下): 方位角速度成分の  $r$  依存性。縦軸は任意目盛り。

達後も継続するので、境界条件として  $z = 0$  で温度が  $r = 0$  に最大値をもつ関数で表される、すなわち

$$\tau_0(r) + \tau_1(r) + \tau_2(r) = T(r, 0) \equiv T_0 + \frac{T_{s0}}{1 + (r/r_s)^2} \quad (6.2.2)$$

を採用することにする。最右辺の式は全く現象論的に採用したものである。これを (6.1.6) に代入し、 $k_1$  モードまでの Fourier 係数を比較して

$$\tau_0'' + \frac{1}{r} \tau_0' - \frac{\rho c_p \nu}{2\lambda} (a_1 \tau_1' + a_2 \tau_2' - k_1 b_1 \tau_1) = -\frac{\rho \nu}{\lambda} \left( c_0'^2 + \frac{c_1'^2 + k_1^2 c_1^2}{2} - \frac{2c_0 c_0' + c_1 c_1'}{r} \right) \quad (6.2.3)$$

$$\tau_1'' + \frac{1}{r} \tau_1' - k_1^2 \tau_1 - \frac{\rho c_p \nu}{\lambda} \left( a_1 \tau_0' + \frac{a_1 \tau_2' + a_2 \tau_1' - k_2 b_1 \tau_2}{2} \right) = -\frac{2\rho \nu}{\lambda} \left( c_0' c_1' - \frac{c_0' c_1 + c_0 c_1'}{r} \right) \quad (6.2.4)$$

を得る。この方程式系の典型的な長さ $\lambda$ と典型的な速さ $V_c$ はそれぞれ

$$d_c = \frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho \nu c_p}} \quad (6.2.5)$$

$$V_c = \sqrt{\frac{\lambda \Delta T_c}{\rho \nu}} \quad (6.2.6)$$

で、典型的な数値  $h = 15 \text{ km}$ ,  $\lambda = 10^{-2} \text{ W/m/K}$ ,  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $c_p = 4 \times 10^3 \text{ J/kg/K}$  に対し、 $d_c = 2 \text{ km}$  で、これが (高さ方向の) 温度変化の距離の目安である。 $\Delta T_c$  は典型的な温度で、その  $5\text{K}$  という値に対し  $V_c = 70 \text{ m/s}$  となる。また、対応する Reynolds 数  $V_c d_c / \nu$  は  $10^{10}$  程度で非常に大きい。

解の一例として、(6.2.2)~(6.2.4) を  $T_1 = 5\text{K}$ ,  $r_s = 2$ , および  $\tau_0(0) / \Delta T_c = 0.3$ ,  $\tau_1(0) / \Delta T_c = 0.56$  という境界値のもとで解いた結果を図 6.3 に示す。解のパターンは  $T_0$  に依らない。

Burgers 渦とは対照的に、上記の境界条件の下での二境界渦では、距離が大きいところで動径方向の温度勾配が小さい。また、二境界渦では上部が低温・低エントロピー、下部が高温・高エントロピーと分かれる傾向がある。渦中心の温度変位が、上部が正で下部が負となるのは、Burgers 渦の場合と共通している。図 6.3 の温度変異は、Ooyama (1969) が予想し観測で存在が確かめられた (Hawkins and Imbombo 1976 ; Halverson 他 2008), 眼の周りの 'hot tower' が二境界渦の温度変異に現れていることを示している。エントロピーについても同様のことがいえることは、エントロピー分布が温度分布と似たパターンを示すことから直ちにわかる。明らかに、これは採用した境界条件  $-z = 0$  で温度は中心が高く周辺が低い-の結果である。例えば温度が  $z = 0$  で一定という境界条件を用いれば、上空に暖気核は存在するが hot tower は形成されない。

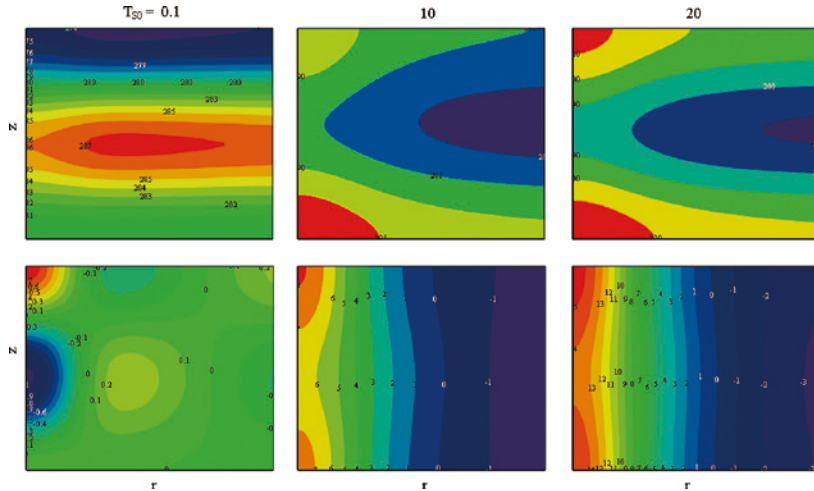


図 6.3 二境界渦の温度分布（上）と温度変位分布（下）。横軸  $r$ ，縦軸  $z$ 。

以上の分析から、すべての力が釣り合った定常渦は、どれも中心上方に熱源を持つことが判った。竜巻 (tornado) や強い寒帯低気圧 (intense polar depression) も巨大渦なので、高所に熱源を持つことが推測される。(台風の特徴は、図 4.2 に示されたような暖気領域が、中心部で上下に長く伸びた hot tower 状態で形成されることである。)

ここまでの話は、熱源が何であるかを問わない。自然現象としての渦を考えるには、これを具体的にしなければならない<sup>7</sup>。台風の場合は、上昇気流に含まれる水蒸気とその凝結(さらに積乱雲の形成)を考慮することになるが、これは気象学の課題である。

### 6.3 台風と単純渦との比較

台風では、大気の上昇により、水蒸気から水への相転移に伴う熱放出が起き、上空が暖められ、暖気核が形成される (Hawkins et al. 1968)。暖気核は水平方向に直径 200 km ほどの広がりを持つ。暖められた空気は軽くなり上昇気流を維持する。台風という装置の中心部で水蒸気の中の熱エネルギーを取り出し、それをを用いて周辺からの空気を取り込みと上空へのエントロピー移動、そして上部境界面を通した排熱放出を行っていると見る事ができる。

6.1 と 6.2 で、境界のない非圧縮性単純渦は、その流れを維持するための熱源を内部と  $z$

<sup>7</sup> 温度分布を決める (6.1.6) は 2 階の多変数偏微分方程式で、ここで示したものの以外にも状況に応じて多種多様な解を持つことができる。例えば、中心から外部に向かって緩やかに温度が上昇する解も可能で、その場合は下の境界面から上に向かう狭い範囲で温度は急激に上昇しさらに上部ではほぼ一定に保たれる。これは、中心を黒点と見ると、太陽表面の彩層の状態によく似ている (例えば Audouze and Israël 1988)。地球気象を離れてこうした事例を詳細に調べることも面白い。

= 0 面に持っていて、渦の中心に暖かい核を形成していることを見た。興味深いことに、無境界単純渦と台風は、熱エネルギー源の場所と、熱が気流を維持しそれによってエントロピーを上部に運び続けるという事実に於いて共通しているのである。

流体が圧縮性であれば境界がある渦を維持できる。6.2 の例は、そのような単純渦によって台風の暖熱核の存在を理解できることを示している。平行な二つの境界を持つ単純渦でも、境界条件を適切にとれば  $z = 0$  面付近は無境界渦と同様相対的な高温領域になっていて、かつ目の中心から離れた場所がより高温になっている。二つの境界をそれぞれ海面と圏界面と見なせば、台風との対応は明らかであろう。

単純渦は風と温度の分布が台風のそれとよく対応していることを見た。ここでの単純渦モデルでは、 $z = 0$  面での摩擦による境界層を取り入れていない。 $z = 0$  面からの熱供給によって渦内の温度分布が実現しているはずであるが、それは摩擦ではなく上昇流の存在によって可能になると見るべきである。この点で、台風の単純渦モデルは Craig and Gray (1996) のシミュレーションの結果を支持している。

本稿で調査した全ての単純渦で、中心上部に暖気核が形成されている。現実の台風との類似は注目に値する。圏界面が自由境界であることを考慮すると、単純渦において、無境界と不動境界の中間的性質を持つ自由境界面を設定したときにどのような結果が得られるかは興味ある問題である。

前節で扱った三種の単純渦は、境界面に熱源を持ち、それが中心付近に集まり上方に運ばれて暖気核を形成する状況と対応させ得ることが判った。台風では、水蒸気が凝結する時に潜熱が放出され、空気の循環を加速すると考えられている。単純渦にこのような相転移による潜熱放出を加味すれば、大気的不安定の実現を通して実際の台風とさらに似た状況を再現できるであろう。熱とエントロピーの移動に関する半定量的な描像を得る上において、単純渦は重要な手がかりを与えてくれることが期待できる。

熱ないしエントロピーを上部に運ぶ方法としては、他に熱伝導と対流がある。熱伝導では、静止した伝導の媒体を温度勾配によって熱が地面や海面の高温部から上空の低温部に運ばれる。これは、低温で密度が高い層が高温で密度の低い層の上に載るといって、重力的に不安定な状態の下で起きる。そこで、大気のような流動性の高い物質では、熱伝導よりも効率のよい対流が実現しやすい。

伝導から対流への遷移は流体一般で起きる。Benard (1901) の対流セルはその例である。Rayleigh 数

$$Ra = \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\lambda \nu}$$



が遷移の目安となる（解説としては例えば Bhattacherjee 1987 がある）。ここで、 $\alpha$  は熱膨張率、 $g$  は重力の加速度、 $d$  は層の厚さ、 $\Delta T$  は温度差、 $\lambda$  は熱伝導係数、 $\nu$  は動粘性係数である。空気の  $\alpha$  は大きく  $\lambda$  は小さいので、比較的穏やかな気象条件の下では、全地球的に至る所で常に対流が起きることになる。地球はこのような方法で地表のエントロピーを定常的に外宇宙に放出している。

台風は、主として海面に存在する異常熱源から熱を運び込み、それをエネルギー源として誕生・成長そして活動する。海面で暖められるだけでは、対流が生じるのみである。渦が作られるためには、内部の熱は、水蒸気に溜めた熱を上昇気流に乗せて速やかに高所に運ばれ、そこで水蒸気から水滴への相転移によって一気に放出されなければならない。すなわち、この意味で初期の台風を直接駆動する熱源は高所に存在するのである。（既に述べたように、竜巻も巨大渦なので、高所に熱源を持つことが推測される。）その熱の一部は、圏界面を通して宇宙空間に放出される。台風は、地球が局所的なエントロピーを短時間で大量に処理する最も強力な装置である。

## 7. おわりに

### 7.1 まとめと展望

本稿において、単純渦は台風モデルとして有効であることを、 $\nu$  展開法による軸対称渦解の解析とその応用を観測される台風現象を中心にして論じた。

$\nu$  展開法によって見えてくるチェシヤ猫効果は、Burgers 渦と Sullivan 渦を含む無限の単純渦解系列の存在を明らかにした。これらの解は、成熟した台風に見られる以下の性質とよく似た性質を持つ：

- ・風速の方位角成分は水平方向で極大値を持ち、極大値の外側では  $1/r^\alpha$  ( $0.5 < \alpha < 1$ ) のように振る舞う。
- ・2つの水平境界面がある場合、高度とともに風速の方位角成分は減少する。
- ・目壁に囲まれた目の直径は、無限遠での循環を一定とすると、最大風速が大きいものほど小さい。
- ・2重または多重目壁が生じることがある。
- ・2次目壁は内側に移動する。
- ・中心部分に暖気核が存在する。存在する範囲は境界条件に依存する。水平な二つの境界面の間に渦がある場合、暖気異常は中心の上部で大きい。

チェシヤ猫効果が現れるのは以下に述べる事情による。まず円筒座標系を採用する。そ

して時間と方位角に依存しない，すなわち定常軸対称解に対する NS 方程式を書き下す。この方程式は粘性反転のもとで，速度場  $v = (v_r, v_\theta, v_z)$  が  $v_r \rightarrow -v_r, v_\theta \rightarrow v_\theta, v_z \rightarrow -v_z$  と変換する。無粘性の極限で速度場が解析的であるとすると， $v_r$  と  $v_z$  は  $\nu$  の奇数次，また  $v_\theta$  は偶数次の項のみからなる Maclaurin 展開が可能である。よって， $\nu \rightarrow 0$  で  $v_r$  と  $v_z$  は 0 となり， $v_\theta$  のみが有限になりうる。他方，展開係数間の関係式から， $v_\theta$  が  $v_r$  の一次の展開係数  $v_{r1}$  で表されることがわかる（この言い表し方は， $v_{r1}$  と  $v_\theta$  の積分定数の数がそれぞれ 1 個と 2 個で， $v_\theta$  の方が多いことによる）。 $\nu$  展開の性質から，これは  $\nu$  には依存しない関係である。こうして， $\nu \rightarrow 0$  で有限に残る  $v_\theta$  の関数形が， $\nu \rightarrow 0$  で 0 になる  $v_r$  によって決められることになる。（電磁流体力学ではこの事情は観測される磁場にも及ぶ。）無粘性極限では，元々は 3 次元空間内の 3 次元渦は，実質は 2 次元自由度のみを持つようになる。

チェシヤ猫効果は，Reynolds 数が大きい任意の渦で重要な役割を果たすことが期待される。そのような流れとしては，台風やプラズマ流以外に竜巻，土星の環，渦巻き銀河などが挙げられる。単純な描像が広い適用範囲を持つことの一つの例でもある。ただし，最後の二例で系を初めから（準）2 次元として扱う場合は，チェシヤ猫効果は 3 次元渦の場合とは一般に異なった結果を導きうる。これは銀河の回転曲線の問題とも絡み特に興味深い。

単純渦解は，実在する台風現象の基本的な性質のいくつかを統一的に説明できるようである。コンピュータの高性能化が，台風を含む気象現象の解析と理解に大きく寄与している。このことが，台風を理解するためには高性能コンピュータが必須であるという思い込みを作り上げているかもしれない。これまで述べてきたように，事実は必ずしもそうではなく，解析的手法で単純渦解を探し調査することは，実在する現象の本質を理解するためのモデル造りという点でも十分意味のあることと思われる。

## 7.2 災害と科学

科学と数値予報は不可分の関係にある。コンピュータの歴史に深く関わった Goldstine は気象の数値予報について次のように述べている（ゴールドスタイン 1979）：

まず第一に，私たちはいったい何を予測するのであろうか。それは，大気の流れにみられる変化である。どうしてそれが問題になるのであろうか。この動きについて知ることは，雲の厚さ，湿度，降雨量，気温などといったような，日ごろ私たちが関心をもっている現象を予測するのに必要-残念ながら，必ずしも十分とはいえないが-だからである。

「日ごろの私たちの関心」は実生活上の必要に根ざしているのであって，それに応えるた

めの広い意味での数値予報を通して科学の活動が促進されるわけである。客観的現実による不断の検証が科学を支えるのである。

地球科学は自然災害と直接に向き合うものであるため、災害の軽減や回避のための予測という実用面をそこに期待するのは必然であろうし、科学活動がそれに呼応して活発化するのも歴史が示す通りである。その傾向は災害の規模が大きいほど顕著になる。逆に言えば、相対的に小規模の災害をもたらす自然現象は忘れられやすい。たとえば、2011年3月に東日本の太平洋岸が数百年から千年に一度の大地震に襲われたことは、人々の記憶に長く残るであろうが、その約半年後に、強大な台風12号と15号が相次いで日本に上陸し、列島西中部に大きな災害をもたらしたことを覚えている人は少ないだろう（気象庁2013、国立天文台2012）。

台風12号は、2011年8月25日に南西太平洋（ルソン島の東方2,100 km）で発生が確認され、9月2日、高知南方300 kmに接近したとき、中心気圧965 hPa、強風半径500 km、最大風速35 m/sの大型で強い台風になっていた。3日、高知県東部に上陸、4日に山陰沖に達するまでの間、各地で年間降水量の1/3を越える雨量（観測史上最大）と、20 m/s（三重県では30 m/s）に達する風速を記録した。

台風15号（図7.1）は、9月13日、沖ノ鳥島の北東海上で発生、20日最大風速が45 m/sの‘非常に強い’台風となった。21日に浜松市付近に上陸時に中心気圧950 hPa、最大風速40 m/sであり、22日に千島列島付近で温帯低気圧となった。この間、東京での観測史上最大となる風速30 m/sの暴風を記録している。

ユーラシア大陸の東辺に沿って位置する弧状列島は、その地理的および地球物理的条件のために地震と台風がもたらす災害の脅威に絶えることなく曝されている。これまでのところ共に人為的制御は不可能であるが、科学の対象として見たときには、両者には大きな違いがある。それは、臨界現象でありかつ短時間現象である地震の‘予知’は極めて難しい（Bak et al. 1988；Ito and Matsuzaki 1990；高橋2012）のに対し、台風はその生成・発達・消滅の時系列を長い時間をかけて追うことができ、その接近と上陸の予測を早い時期から立てることができる点である。にもかかわらず、例えば2011年の台風12号、15号ともに、土砂崩れ、河川氾濫等による多数の人的（12号：死者82名、行方不明者16名、15号：死者18名、行方不明者1名）物的被害をもたらした。交通網の寸断もその中に含まれる。（ことに、台風15号は、その経路の近くに、半年前の大震災で壊滅した東京電力福島第一原子力発電所が位置していたため、世界的な注目を集めた。）ここに我々は、この方面の科学の成果を十分に生かすことができていない社会の現実を見る。

南西太平洋諸国の台風被害はさらに甚大であることも周知の事実である。事程さように、

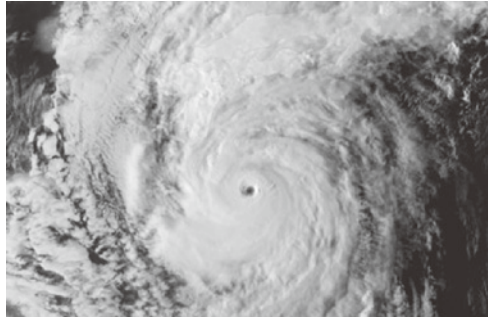


図 7.1 台風 15 号/2011 年〔英語名 Roke〕の衛星画像. 2011 年 9 月 20 日 7 時 30 分 (NOAA 提供)。

台風の力学的および熱的エネルギーは巨大で、構造物に対する破壊力は凄まじく、いかなる人工エネルギーもそれに遠く及ばない。地球温暖化が進む中で台風は今後巨大化に向かう可能性が高く（野田他 2003）、それに伴う風雨や高潮の破壊力はさらに増すことが予想される。寺田（1934）は既に、社会がより高度に組織化される程に被害の程度は増大する一方であろうと警告している。それは、台風の科学的理解が進むこととは殆ど無関係であり、社会が短期的な効用最大化原理によって動くのではなく、広義の安全係数を高くすることに価値を認めるシステム造りを目指すことによってのみ対応できる事態である。台風のさらなる科学的研究は、それと平行して自然のより深い理解という目標を実現するために今後も続けられるはずである。集積された知識をどのように生かすかは個々の人間と社会次第である。

大きな災害と直結する現象であるために、台風や地震の科学研究に予測精度の向上という成果を期待するのは、人間として自然なことであろう。大気現象である台風の場合、それが地球表面以上の高さの観測可能な範囲で起きること、および流体を支配する基本法則は知られていることから、使えるデータが十分であれば結果の精度も必要に応じて向上させることができるというさらなる期待が生まれる。その方向に添って、いわゆるスーパーコンピュータまたはそれに準ずる高性能コンピュータを駆使する数値解析の手法を用いた研究が普通に行われるようになった。こうした研究の現実性を高める努力は、気象学以外の流体力学の分野でも共通して認められる。数理解析の手法が及びにくい乱流の性質が明らかになったのは、数値計算の方法の発展による。

ただ、いかなるコンピュータも、入力データの正確さに応じてのみ結果を生産するものである。気象に関わるデータは空間的にも時間的にも広範囲にわたるのであり、原理的な予測不可能性の問題は別として、それを大方の応用に耐えられる予報が可能になるまでに十分に収集するには人的技術的資源が少な過ぎるという事情を、当分の間は受け入れざるを得ないようである。

補足 流体内の温度分布

ここでは、流れを維持するために必要な温度分布を決める (5.1.6) 式の導出を、谷 (1963a) に従って行う。熱力学第 1 法則より

$$\frac{d}{dt} \left( K + U + \int \rho Q d\tau \right) = W_1 + W_2 + W_3$$

左辺の括弧の中の第 3 項は  $d\tau$  を体積要素とする体積積分である。

左辺は、流体小部分の運動エネルギー、位置エネルギー、熱エネルギーの和が変化する割合を、右辺は、流体部分に働く応力によってなされる仕事、外力によってなされる仕事、流体部分に流入する熱量の和である。流体の境界に変化がないとすると、全位置エネルギーの変化は密度  $\rho$  の変化を通してのみ生じる。

$W_{1,2,3}$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} W_1 &= \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \cdot d\sigma \\ &= \int \partial_\beta (v_\alpha p_{\alpha\beta}) d\tau \\ &= \int p_{\alpha\beta} \partial_\beta v_\alpha d\tau + \int v_\alpha \left( \rho \frac{dv_\alpha}{dt} - \rho f_\alpha \right) d\tau \\ &= \int p_{\alpha\beta} \partial_\beta v_\alpha d\tau + \frac{dK}{dt} - W_2 \end{aligned}$$

(2 行目から 3 行目への変形に NS 方程式を使っている。)

$$\begin{aligned} W_2 &= \int \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\tau \\ W_3 &= \int \lambda \nabla T \cdot d\sigma = \int \nabla (\lambda \nabla T) d\tau \end{aligned}$$

である。ここで、 $p$  は応力テンソル

$$p_{\alpha\beta} = - \left( p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \delta_{\alpha\beta} + \mu (\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha)$$

$\mathbf{f}$  は外力、 $\lambda$  は熱伝導係数、 $d\sigma$  は向き付け面積要素である。非圧縮流体なら  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  である。したがって

$$W_1 + W_2 + W_3 = \int p_{\alpha\beta} \partial_\beta v_\alpha d\tau + \frac{dK}{dt} + \int \nabla (\lambda \nabla T) d\tau$$

相転移はなく、熱量は温度と定圧比熱  $c_p$  を使って  $dQ = c_p dT$  で関係づけられるとする。

単位質量当たりの位置エネルギー  $u$  は時間に依存しないとすると、全位置エネルギーの時間変化は

$$\frac{dU}{dt} = \int \frac{d\rho}{dt} u d\tau$$

である。初めの式が任意の体積要素  $d\tau$  について成り立つことから、

$$\frac{d\rho}{dt} u + \frac{d}{dt}(\rho Q) = p_{\alpha\beta} \partial_{\beta} v_{\alpha} + \nabla(\lambda \nabla T)$$

一般に、時間に関する全微分は  $d/dt = \partial_t + v \cdot \nabla$  であるが<sup>8</sup>、定常状態であれば移流項だけ、すなわち  $d/dt = v \cdot \nabla$  で、この式は

$$uv \cdot \nabla \rho + v \cdot \nabla(\rho Q) = p_{\alpha\beta} \partial_{\beta} v_{\alpha} + \nabla(\lambda \nabla T)$$

となる。流体が非圧縮性とするると左辺第 1 項はゼロとなり、流体内部の温度分布を決める式 (6.1.6) を得る。

#### 参考文献

- Audouze J and Israël G (ed) 1988, *The Cambridge atlas of astronomy* (Cambridge Univ. Press, Cambridge) 18.
- Bak P, Tang C and Wiesenfeld K 1988, Self-organized criticality *Phys. Rev. A* **38** 364.
- Baker J T 2000, High viscosity solutions of the Navier-Stokes equations modeling a tornado vortex *Thesis in mathematics, the graduate faculty of Texas Tech. Univ.* ;  
<https://repositories.tdl.org/ttu-ir/bitstream/handle/2346/18824/31295016657479.pdf?sequence=1>.
- Bellamy-Knights P G 1970, An unsteady two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations *J. Fluid Mech.* **41** 673.
- Bellamy-Knights P G 1971, Unsteady multicellular viscous vortices *J. Fluid Mech.* **50** 1.
- Benard H 1901, Etude experimentale des courants de convection dans une nappe liquide *J. de Phys.* **10** 513.
- Bhattacharjee J K 1987, *Convection and chaos in fluid* (World Scientific), Chap.1.
- Burgers J M 1948, A mathematical model illustrating the theory of turbulence *Adv. Appl. Mech.* **1** 171.
- Charney J G and Eliassen A 1964, On the growth of the hurricane depression *J. Atmos. Sci.* **21** 68.
- Craig G C and Gray S L 1996, CISK or WISHE as the mechanism of tropical cyclone intensification *J. Atmos. Sci.* **53** 3528.
- Donaldson C du P and Sullivan R D 1960, Examinations of the solutions of the Navier-Stokes

- equations for a class of three-dimensional vortices. Part I. Velocity distributions for steady motion *Aero. Res. Assoc. Princeton Rep.* AFOSR TN60-1227.
- Drazin P and Riley N 2006, The Navier–Stokes equations A classification of flows and exact solutions *London Math. Soc. Lec. Note Ser. 334* (Cambridge Univ.).
- Fortner L E 1958 Typhoon Sarah, 1956, *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **39** 633.
- Franklin J L, Black M L and Valde K 2003, GPS Dropwindsonde wind profiles in hurricanes and their operational implications *Wea. Forecast.* **18** 32.
- Fujita T 1951, Pressure distribution within typhoon *Geophys. Mag.* **23** 438.
- Halverson J B, Simpson J, Heymsfield G, Pierce H, Hock T and Ritchie L 2006, Warm core structure of hurricane Erin diagnosed from high altitude dropsondes during CAMEX-4. *J. Atmos. Sci.* **63** 309.
- Hawkins, H. F., and S. M. Imbembo 1976, The structure of a small, intense Hurricane—Inez 1966. *Mon. Wea. Rev.* **104** 418.
- Hawkins H F and Rubsam D T 1968, Hurricane Hilda, 1964 II. Structure and budgets of hurricane on October 1, 1964. *Mon. Wea. Rev.* **96**, 617.
- Hawkins H F 1983, Hurricane Allen and island obstacles *J. Atmos. Sci.* **30** 1565.
- Hawkins J D and Helveston M 2008, *Tropical cyclone multiple eyewall characteristics* 28 th Conf. Hurr. Trop. Meteor., Orlando, FL.
- Holmes M H 2013, *Introduction to Perturbation Methods* (Springer, New York).
- Ito K and Matsuzaki M 1990, Earthquakes as self-organized critical phenomena *J. Geophys. Res.* **95** 6853.
- Jordan C L, Frank L T and Schatzle J 1961, The “double eye” of hurricane Donna *Mon. Wea. Rev.* September 354.
- Lewis B M and Hawkins H F 1982, Polygonal eyewalls and rainbands in hurricanes. *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **63** 1294.
- Lorenz E N 1963, Deterministic nonperiodic flow *J. Atmos. Sci.* **20** 130.
- McWilliams J C, Graves L P and Montgomery M T 2003, A formal theory for vortex Rossby waves and vortex evolution *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **97** 275.
- Merrill R T 1984, A comparison of large and small tropical cyclones *Mon. Wea. Rev.* **112** 1408.
- Molinari J and Skubis S 1985, Evolution of the surface wind field in an intensifying tropical cyclone *J. Atmos. Sci.* **42** 2865.
- Moffatt H K 2000, The interaction of skewed vortex pairs : a model for a blow up of the

- Navier-Stokes equations *J. Fluid Mech.* **409** 51.
- Montgomery M T and Kallenbach R J 1997, A theory for vortex Rossby-waves and its application to spiral bands and intensity changes of hurricanes *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **123** 435.
- Muramatsu T 1986, The structure of a polygonal eye of a typhoon *J. Meteor. Soc. Japan* **64** 913.
- Noland D and Montgomery M T, 2000, The algebraic growth of wave-number one disturbances in hurricane-like vortices *J. Atmos. Sci.* **57** 3514.
- Noland D and Montgomery M T 2002, Nonhydrostatic, three-dimensional perturbations to balanced, hurricane-like vortices. Part I: Linearized formulation, stability, and evolution *J. Atmos. Sci.* **59** 2989.
- Nong S and Emanuel K 2003, A numerical study of the genesis of concentric eyewalls in hurricanes *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **129** 3323.
- Ooyama K 1964, A dynamical model for the study of tropical cyclone development *Geofis. Int.* **4** 187.
- Ooyama K 1966, On the stability of the baroclinic circular vortex: a sufficient criterion for instability *J. Atmo. Sci.* **23** 43.
- Oseen C W 1911, Über Wirbelbewegung in einer reibenden Flüssigkeit *Ark. Mat. Astron. Fys.* **7** 14.
- Oseen C W 1927, Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik *Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern* (Akademische Verlags., Leipzig), pp 214.
- Riehl H 1950, A model of hurricane formation *J. Appl. Phys.* **21** 917.
- Rott N 1958, On the viscous core of a line vortex *Z. Angew. Math. Phys.* **9** 543.
- Shapiro L J and Willoughby H E 1982, The response of balanced hurricanes to local sources of heat and momentum *J. Atmos. Sci.* **39** 378.
- Simmonds J G and Mann J E Jr 1986, *A First Look At Perturbation Theory* (Dover Publications, Inc., Mineola, New York).
- Smith R A and Rosenbluth M N 1990, Algebraic instability of hollow electron columns and cylindrical vortices *Phys. Rev. Lett.* **64** 649.
- Sullivan R D 1959, A two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations *J. Aerosp. Sci.* **26** 767.



- Takahashi K 2013, Multiple peaks of the velocity field as the linear perturbations on the non-Eulerian inviscid vortex *Fac. Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)* **166** 1 ;  
[http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2013/pdf/no10\\_02.pdf](http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2013/pdf/no10_02.pdf)
- Takahashi K 2014a, Non-Eulerian inviscid vortices *Fac. Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)* **167** 43 ;  
[http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2014/pdf/no01\\_04.pdf](http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2014/pdf/no01_04.pdf).
- Takahashi K 2014b, Classification of the steady axisymmetric vortices *Fac. Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)* **168** 51 ; [http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2014/pdf/no06\\_03.pdf](http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2014/pdf/no06_03.pdf).
- Tervey W D and Montgomery M T 2008, Secondary eyewall formation in two idealized, full-physics modeled hurricanes *J. Geophys. Res.* **113** D12112.
- von Neumann J 1950, *Recent theories of turbulence* Institute for Advanced Study (Princeton).
- Walko R and Gall R 1984, A two-dimensional linear stability analysis of the multiple vortex phenomenon. *J. Atmos. Sci.* **41** 3456.
- Wang C Y 1989 Exact solutions of the unsteady Navier-Stokes equations *Appl. Mech. Rev.* **42** S269.
- Wang C Y 1991, Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23** 159.
- Willoughby H E, Clos J A and Shoreibah M G 1982, Concentric eyewalls, secondary wind maxima and the evolution of the hurricane vortex *J. Atmos. Sci.* **39** 395.
- 岡本久・山田道夫 (訳・解説) [Okamoto H, Yamada M trns.&notes] 2013, 「最近の乱流理論」 [伊東恵一 (編・訳) [Ito K ed.&trns.] 『数理物理学の方法 ノイマンコレクション』 (筑摩) pp 336-414 所収].
- 気象庁 [Japan Meteorological Agency] 2013, 『平成 23 年 7 月新潟・福島豪雨と平成 23 年 (2011 年) 台風第 12 号及び台風第 15 号の調査報告』 気象庁技術報告 第 134 号 (ISSN0447-3868, No. 134),  
[http://www.jma.go.jp/jma/kishou/books/gizyutu/134/gizyutu\\_134.html](http://www.jma.go.jp/jma/kishou/books/gizyutu/134/gizyutu_134.html).
- 木田重雄・柳瀬眞一郎 [Kida S, Yanase S] 1999, 『乱流力学』 (朝倉) 第 9 章.
- 国立天文台 [National Astronomical Observatory of Japan] 2012 『理科年表 86』 気象部 (丸善).
- ゴールドスタイン H H 1979, 『計算機の歴史 パスカルからノイマンまで』 (末包他訳, 共立) 第 5 章.

- 柴田正和 [Shibata M] 2009, 『漸近級数と特異摂動法 — 微分方程式の体系的近似解法』(森北).
- 総務省統計局 [Statistics Bureau of Japan] 2014 『日本の統計 2014』 第 10 章 ;  
<http://www.stat.go.jp/data/nihon/index1.htm>.
- 高橋光一 [Takahashi K] 2012, 地震のセルオートマトンにおけるリズムと構造  
東北学院大学教養学部論集 **161** 47 :  
[http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2012/pdf/bk2012no03\\_04.pdf](http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2012/pdf/bk2012no03_04.pdf)
- 谷一郎 [Tani I] 1963a, 『流れ学 第 3 版』(岩波全書) 第 6 章.
- 谷一郎 [Tani I] 1963b, 『流れ学 第 3 版』(岩波全書) 第 9 章.
- 寺田寅彦 [Terada T] 1934, 『天災と国防』 寺田寅彦随筆集 (岩波) 第 5 卷.
- 野田章, 磯部英彦, 鬼頭昭雄, 佐藤康雄, 杉正人, 西森基貴, 松本淳 [Noda A, Kito A, Sato Y, Sugi M, Nishimori M, Matsumoto J] 2003 『地球温暖化と日本 自然・人への影響予測』(原沢英夫編, 古今書院) 第 1 章.