

# 大学院への（での）マクロ経済分析道具箱(1)\*

細 谷 圭†

1. はじめに
  2. モデルの設定と縮約された動学体系
  3. ヤコビアンと局所的な動学特性
  4. 位相図による大域的な特性の描写
    - 4.1. 準備
    - 4.2.  $\sigma/(1+\sigma) \leq \theta < 1$  のケース
    - 4.3.  $\theta > 1$  のケース
- 参考文献

---

\*A graduate level macroeconomic analysis toolbox (1).

本稿が依拠しているHosoya (2014, 2015) に対して, 浅子和美 (立正大学, 一橋大学名誉教授), 中村勝克 (福島大学), 加納隆 (一橋大学), 松井啓伸 (関東学園大学), 外木暁幸 (一橋大学), 李綱 (一橋大学) の各先生方から有益なコメントを頂戴した。それらのコメントにより本稿の執筆が可能となった。記して感謝したい。なお, 本研究は, JSPS科研費若手研究 B (#24730251) および基盤研究 C (#15K03448) の助成を受けている。

†東北学院大学経済学部

Tel.: +81 22 721 3345

E-mail: khosoya@mail.tohoku-gakuin.ac.jp.

## 1. はじめに

このテクニカル・ノートは、大学院初級レベルのマクロ経済学で遭遇する「難所」の通過をサポートする目的で編まれるものである。可能なら、一定の分量でのシリーズ化を企図している。第1回は、最適成長モデル (optimal growth model) 系列の動学モデル分析においてしばしば用いられる位相図 (phase diagram) を使った大域的分析 (global analysis) とそこにいたる過程で途中停車する局所的分析 (local analysis) について解説を試みる。

多くの大学院レベルの標準的なテキストでは、いわゆるラムゼー・モデルを素材として、位相図を使ったダイナミクスの分析が展開されている<sup>1)</sup>。執筆されたのはいまから20年以上前ではあるものの、やはり Blanchard and Fischer (1989) の筆致は秀逸であり、一読の価値があると言えよう。いずれにせよ、ラムゼー・モデルに関する限りは、新たな解説書や解説論文は必要ないほど優良なものが数多く存在している。

しかしながら、実際に自らのオリジナル・モデルを構築し分析を行う段になると、しっかり勉強したはずの知識を以ってしても、どのように分析を進めていくべきか迷うことが多いこともまた事実である。つまり、実際に登ってみて遭遇する難所を通り抜けるためには、プラスアルファの知識と経験が必要なのである。本稿では、典型的なモデルではなく、筆者自身が構築した内生的成長モデル (Hosoya, 2014, 2015) をあえて素材として選択し、位相図分析にいたる思考のプロセスを具体的に余すところなく記述してみたいと思う。この意味で、マクロ専攻の院生のみならず、大学院コースワークでマクロの分析手法にしばしば戸惑いを覚える他の専攻の院生にとっても役立つ内容となることを期待している。

与えられたモデルに対して、まずポントリャーギン (L.S. Pontryagin) の最大値原理 (maximum principle) を使っていわゆるケインズ＝ラムゼー・ルールが導かれる。本稿は均衡動学を規定する動学方程式が出揃った後の解析作業に特に焦点をあてるため、モデルの背景をはじめとした一般的な説明は意識的に省略する。これらについては、原論文とともに、先に言及した定評あるテ

1) 代表的なテキストとしては、Blanchard and Fischer (1989), Barro and Sala-i-Martin (2003), Romer (2011) などがある。このうち、Barro and Sala-i-Martin (2003) は経済成長論に特化した代表的なテキストであり、理論だけでなく収束論をはじめとした実証分析も解説されている。このテキストの巻末には数学付録があり、動学モデル分析で用いられるテクニックが極めて平易に語られている。成長論の決定版とも言えるテキストとして、近頃 Acemoglu (2009) がリリースされた。バローらのものはタイプが異なっており、要求される数学のレベルもいくぶん高い。バローの方はマクロ経済学専攻の者ならば読んでおいて損はない。一方、アセモグルの方は、マクロのなかでも経済成長論を専攻する者に向いているというのが筆者の印象である。なお、ブランチャールやローマーは、マクロ一般について広く解説している代表的なテキストである。かつて内生的成長理論の代表的なテキスト (Aghion and Howitt, 1998) を書いたアギオンらも、経済成長全般に関するよくまとまったテキスト (Aghion and Howitt, 2008) を最近公刊した。加えて、日本語での著作についても言及しておこう。岩井 (1994) は短いながらもエッセンスが凝縮されていて、いまでも有益である。学部レベルから大学院レベルに跳躍するのに際して、少し前では脇田 (1998) が優れており、最近では齊藤ほか (2010) も大変参考になる。動学的最適化の考え方について、経済学の視点から詳述しているものとして、西村 (1990), チャン (2006), 中田 (2011) がある。ところで、私事で恐縮だが、学部後半期にバローらのテキストの初版 (Barro and Sala-i-Martin, 1995) と岩井 (1994) をノート片手に読み、経済成長論が描き出す世界に魅せられていったことは懐かしい思い出となっている。

キスト群を参照していただきたい。

## 2. モデルの設定と縮約された動学体系

さっそくモデル構造を簡単に説明しよう。代表的家計は消費から効用を得るが、公的に供給されるインフラストラクチャー（インフラ）の水準からもプラスの影響を受ける。すなわち、家計にとって、インフラは効用の源泉であるものの、外生変数である。次に供給サイドである。物的資本と非弾力的に供給される労働が生産要素となる新古典派的な生産関数に基づき、最終財生産が行われる。ただし、ここにもインフラが関係する。インフラは労働増加的な効果を発揮するものと想定され、ハロッド中立的技術進歩のタイプの生産関数となる。物的資本のダイナミクスは、政府支出が組み込まれる場合の標準的モデルの場合と全く同一である。インフラ供給の財源は、政府が家計にフラットな比例的所得税を課し、それによってファイナンスされるというシンプルなものである。まず、以上の環境下で、代表的家計は動学的最適化問題を解くことになる。フォーマルに示しておこう。

$$\max_C \int_0^{+\infty} \frac{(CH^\sigma)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt, \quad \sigma \geq 0, \theta > 0, \theta \neq 1, \rho > 0 \quad (1)$$

subject to

$$\dot{K} = Y - C - G, \quad K(0) = K_0 > 0 \quad (2)$$

$$Y = K^\alpha (HL)^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1) \quad (3)$$

$$G = \tau Y, \quad \tau \in (0, 1) \quad (4)$$

ここで  $C$ ,  $H$ ,  $K$ ,  $Y$ ,  $G$ ,  $L$  は、それぞれ消費、インフラ、物的資本、産出（最終財）、政府支出（インフラ投資）、労働をあらわしている<sup>2)</sup>。効用関数に含まれるディープ・パラメータは3つある。 $\sigma$ ,  $1/\theta$ ,  $\rho$  は、それぞれインフラのウェイト（弾力性）、異時点間の代替の弾力性、主観的割引率（時間選好率）に対応する。また、 $\alpha$  は資本分配率（資本シェア）、 $\tau$  は所得税率となる。先述したように、労働供給は非弾力的であり、分析を通じて  $L = 1$  と規準化する。ゆえに、 $H$  を除くモデル内のすべての変数は1人あたり量となる。政府部門に関しては、各時点で均衡財政が維持されるものとする。

いま分権経済を考えてみよう。仮定により、 $H$  は外生的なストック変数であったから、代表的家計は(2)–(4)を制約条件として、(1)の目的関数を最大化する<sup>3)</sup>。結果として、以下のケインズ＝ラムゼー・ルールが導かれる<sup>4)</sup>。

2) 簡単化のため、特に明示する必要のない限り、以下では時間のインデックス  $t$  を省略することにする。

3) このため、社会的計画経済では必要となる  $C$  と  $H$  に関する連結凹性条件 (joint concavity condition)  $\theta \geq \sigma/(1+\sigma)$  は目下不要である。

4) 解法を要約しておく。経常価値表記ないしは現在価値表記のハミルトニアンを設定し、コントロール変数 ( $C$ ) と状態変数 ( $K$ ) についての1階条件をまず導出する。これら2本と資源制約式が最適化のための必要条件である。物的資本ストックに関連する横断性条件 (transversality condition) が成立する下では、上記の必要条件は十分条件となる。

$$g_C = \frac{1}{\theta} \left( \alpha(1-\tau) \left( \frac{K}{H} \right)^{\alpha-1} + \sigma(1-\theta)g_H - \rho \right) \quad (5)$$

ただし、 $g_x$ は任意の下付き添え字  $x$  に関する成長率（伸び率）をあらわす。

モデルを閉じるためには、インフラである  $H$  の蓄積プロセスを明らかにする必要がある。端的に言って、毎期のインフラ投資によりインフラが蓄えられていくのだが、外部効果的なものとして社会経済環境ないしは生活水準もインフラのダイナミクスに影響をおよぼすと考える。すなわち、 $\dot{H} = \delta GS$ として  $H$  の蓄積方程式が設定される。ここで、 $\delta > 0$ は一般的な効率性パラメータであり一定とする。 $S$  が投資環境を規定する変数である。多様な考え方があろうが、ここではシンプルに（物的）資本の深化（capital deepening）が  $S$  と平行であると想定し、 $S \equiv (K/H)^\epsilon$ と定式化する（パラメータ  $\epsilon \in (0, 1)$ は外部効果の程度をあらわす）。これらから  $\dot{H} = \delta G(K/H)^\epsilon$ となり、(4)を考慮してこれを整理すると、 $g_H \equiv \dot{H}/H = \delta\tau(K/H)^{\alpha+\epsilon}$ となる。物的資本・インフラ比率が  $K/H = (g_H/\delta\tau)^{1/(\alpha+\epsilon)}$ となることと、均斉成長経路（balanced growth path; BGP）で  $g \equiv g_Y = g_C = g_K = g_H$ が成立することを利用すると、結果的に以下を得る。

$$g = \frac{1}{\theta} \left( \alpha(1-\tau) \left( \frac{g}{\delta\tau} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\epsilon}} + \sigma(1-\theta)g - \rho \right) \quad (6)$$

(6)より均斉成長経路上での均衡成長率は7つのパラメータ  $\{\alpha, \tau, \delta, \epsilon, \sigma, \rho, \theta\}$ に依存して決まってくる。

これでひとまずモデルを「解く」作業は終了した。次は何をすべきであろうか。まず長期均衡解の存在および一意性を確認しておくべきである。また、モデルの一般均衡解の安定性、さしあたって局所的安定性を調べておくことも重要である。

実は現在のモデルでは、解が一意的に存在するために、デープ・パラメータに関するある条件が必要になってくる。それは先の脚注で言及した  $\theta \geq \sigma/(1+\sigma)$ である。複数の定常均衡が生じる状況は興味深い、分析目的からすると回避しておきたい。そのため、連結凹性条件の観点からではなく、解の一意的存在を保証する観点で、上記の条件を仮定する。これを便宜上、**仮定 1**とする。異時点間の代替の弾力性に関する一般的な実証結果から判断しても、これはそれほど無理のない仮定である。なお、詳しい証明については Hosoya (2014) を参照してもらいたい。以上より、長期均衡は確かに存在し、(6)から（正の）均衡成長率が一意的に決まる。

次は局所的安定性である。当然ながら、直面している動学体系全体を相手にしないとイケない。ケインズ＝ラムゼー・ルールが導出されているので、体系は  $(C, K, H)$  に関する3本の微分方程式体系によって表現される。(5), (2)–(4), そして上述した  $H$  に関する動学方程式より、次のようにまとめて示される。

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \left( \alpha(1-\tau) \left( \frac{K}{H} \right)^{\alpha-1} + \sigma(1-\theta) \frac{\dot{H}}{H} - \rho \right) \quad (7)$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = (1-\tau) \left( \frac{K}{H} \right)^{\alpha-1} - \frac{C}{K} \quad (8)$$

$$\frac{\dot{H}}{H} = \delta\tau \left( \frac{K}{H} \right)^{\alpha+\epsilon} \quad (9)$$

このまま分析を進めることも一案だが、Futagami et al. (1993) や Benhabib and Perli (1994) に見られるように適切な変数置換を行って体系の次元を落とし、分析を容易にすることが考えられる。この手法にはさらなる利点もある。もし3次元体系を2次元体系にうまく縮約できれば、後に予定している位相図を使った分析が現実的なものとなるからである。実は本稿のモデルでは最もシンプルな方法でこのことが可能になる。いま  $X \equiv C/K$  と  $Z \equiv K/H$  を導入してみよう。 $X$  はコントロール変数  $C$  と状態変数 (state variable)  $K$  の比率変数なのでジャンプ可能であり、quasi-control variable と呼ばれる。一方で、 $Z$  は状態変数どうしの比率変数なので状態変数である。ここまで来ると先が見える。定番の対数時間微分の出番である。 $\dot{X}/X = \dot{C}/C - \dot{K}/K$  と  $\dot{Z}/Z = \dot{K}/K - \dot{H}/H$  となる。(7)-(9)をこれらに代入し整理すると、次の(10)と(11)を得る。

$$\frac{\dot{X}}{X} = X + \left( \frac{1-\theta}{\theta} \right) \delta\sigma\tau Z^{\alpha+\epsilon} + \left( \frac{\alpha-\theta}{\theta} \right) (1-\tau) Z^{\alpha-1} - \frac{\rho}{\theta} \quad (10)$$

$$\frac{\dot{Z}}{Z} = -X + (1-\tau) Z^{\alpha-1} - \delta\tau Z^{\alpha+\epsilon} \quad (11)$$

### 3. ヤコビアンと局所的な動学特性

縮約された動学体系を利用して、局所的な性質を調べる。(10)と(11)を均斉成長均衡（定常状態ないしは長期均衡）の近傍で線形近似する。すなわち、

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = J^* \begin{pmatrix} X - X^* \\ Z - Z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dZ \end{pmatrix}$$

とあらわせる。ここで各要素は、

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left. \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} \right|_{\text{BGP}} = X^* \\ a_{12} &= \left. \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right|_{\text{BGP}} = \left( \frac{1-\theta}{\theta} \right) \delta\sigma\tau(\alpha+\epsilon) X^* (Z^*)^{\alpha+\epsilon-1} \\ &\quad + \left( \frac{\alpha-\theta}{\theta} \right) (\alpha-1)(1-\tau) X^* (Z^*)^{\alpha-2} \end{aligned}$$

$$a_{21} = \left. \frac{\partial \dot{Z}}{\partial X} \right|_{\text{BGP}} = -Z^*$$

$$a_{22} = \left. \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} \right|_{\text{BGP}} = (\alpha - 1)(1 - \tau)(Z^*)^{\alpha-1} - \delta\tau(\alpha + \epsilon)(Z^*)^{\alpha+\epsilon}$$

である。アスタリスク (\*) は均斉成長均衡で評価した値であることを示している<sup>5)</sup>。そして、係数行列  $J^*$  はヤコビアンである。

均衡の局所的な特性は、この係数行列から判断することができる。はじめに、現在のモデルは準制御変数  $X$  と状態変数  $Z$  の体系に縮約されていることに留意しよう。行列のディターミナント ( $\text{Det } J^* = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ) とトレース ( $\text{Tr } J^* = a_{11} + a_{22}$ ) より、(i)  $\text{Det } J^* < 0$  なら、トレースに依らず2つの固有値の符号は異符号と判定される。マイナスのものが1つだけ含まれるので、ユニークに決まる長期均衡に収束するサドル・パスが存在する(サドル・パスは1次元の安定多様体)。ケース (i) はサドル経路安定である。次に  $\text{Det } J^* > 0$  ならば、固有値の符号の組み合わせは (+, +) か (-, -) のどちらかになるから、トレースを確認する必要がある。(ii)  $\text{Det } J^* > 0$  かつ  $\text{Tr } J^* > 0$  なら、(+, +) で、均衡点は source となり不安定である。この場合、経済的に意味のある解は、初期時点で均衡点に位置する場合に限られよう。(iii)  $\text{Det } J^* > 0$  かつ  $\text{Tr } J^* < 0$  なら、(-, -) で、均衡点は sink となり安定である。2つの安定アームによって2次元の安定多様体が形成され、準制御変数の任意の選択に応じて、ユニークに決まる長期均衡に収束する複数の経路の存在が許される。換言すると、このケースは内生的成長モデルでしばしば生じ得る不決定性 (indeterminacy) のケースに該当する。

上述した (i) から (iii) のケース判定を行うため、ディターミナントを計算してみよう。

$$\text{Det } J^* = -\frac{\alpha}{\theta}(1 - \alpha)(1 - \tau)X^*(Z^*)^{\alpha-1} - \left(\frac{\theta - \sigma + \sigma\theta}{\theta}\right)\delta\tau(\alpha + \epsilon)X^*(Z^*)^{\alpha+\epsilon}$$

先に仮定した均衡の一意的存在を保証する条件 (仮定 1) である  $\theta \geq \sigma/(1 + \sigma)$  を第2項に適用すると、 $\text{Det } J^* < 0$  が得られる。すなわち、本モデルはケース (i) に該当し、長期の均斉成長均衡はサドル経路安定である。

5)  $X$  と  $Z$  の均斉成長均衡値は、以下の連立方程式を満足させる解に対応する。

$$X^* + \left(\frac{1 - \theta}{\theta}\right)\delta\sigma\tau Z^{\alpha+\epsilon} + \left(\frac{\alpha - \theta}{\theta}\right)(1 - \tau)(Z^*)^{\alpha-1} - \frac{\rho}{\theta} = 0$$

$$X^* - (1 - \tau)(Z^*)^{\alpha-1} + \delta\tau(Z^*)^{\alpha+\epsilon} = 0$$

ただし、正值の  $g$  に対して  $X^* > 0$  でなければならない。この要請に適うためには、 $X^* = (1 - \tau)(Z^*)^{\alpha-1} - g > 0$  が満たされねばならない (この条件式は上の2番目の式とインフラの動学方程式から導かれる)。当然のことだが、以下の分析においては、 $X^*$  の正值性条件は満たされている。

## 4. 位相図による大域的な特性の描写

### 4.1. 準備

いよいよこのテクニカル・ノートの本題である位相図を使った大域的分析に入っていく。(10)と(11)をじっくり眺めてみると、ティピカルな分析で登場するものとは異なり、だいぶ複雑な非線形微分方程式になっている。したがって、簡単に位相図を描ける状況にはない。現時点でわかっているのは、絵を描くとすると  $(Z, X)$  平面が分析平面になるということくらいである。

絵を描く際に、傾きと端点での状況を知ることが必要であるから、まずはそのための準備を丁寧に行うことにする。この段階で1つ自然な仮定を置く。異時点間の代替の弾力性の逆数は資本分配率より大きいというものである (**仮定2**)。すなわち、 $\theta > \alpha$  である。 $\alpha$  は通常 0.3-0.35程度の値であるから、実証的にも理論モデルの構造上も極めて自然な仮定である。 $\dot{X} = 0$  線と  $\dot{Z} = 0$  線の傾きを知るには、以前の線形近似体系を活用するとよい。簡単な計算により、 $\dot{X} = a_{11}dX + a_{12}dZ$  と  $\dot{Z} = a_{21}dX + a_{22}dZ$  が得られる。よって、 $\dot{X} = 0$  としたときの傾き ( $\dot{X} = 0$  線の傾き) と  $\dot{Z} = 0$  としたときの傾き ( $\dot{Z} = 0$  線の傾き) は次のように求められる。

$$\left. \frac{dX}{dZ} \right|_{\dot{X}=0} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \quad (12)$$

$$\left. \frac{dX}{dZ} \right|_{\dot{Z}=0} = -\frac{a_{22}}{a_{21}} \quad (13)$$

やや面倒なのは  $\dot{X} = 0$  線の方で、 $\theta$  の値から直接的な影響を受ける。したがって、より簡単に考えることのできる  $\dot{Z} = 0$  線の方から検討していこう。(13)から、 $\dot{Z} = 0$  線の傾きは  $a_{21}$  と  $a_{22}$  の符号がわかれば確定することができる。 $a_{21} < 0$  は確定している。 $a_{22}$  も第1項が負なので、全体として  $a_{22} < 0$  である。(13)にこれらの結果をあてはめると、 $\dot{Z} = 0$  線は  $(Z, X)$  平面でマイナスの傾きをもつ。 $\dot{Z} = 0$  線を具体的に求めると、 $X = (1-\tau)Z^{\alpha-1} - \delta\tau Z^{\alpha+\epsilon}$  を得る。端点のプロパティを見ることで、曲線の形状をさらに詳細に把握する。 $Z \rightarrow 0$  とすると  $X$  は  $+\infty$ 、 $Z \rightarrow +\infty$  とすると  $X$  は  $-\infty$  である。次に位相を確認する。(11)を見よ。 $X$  を固定し、 $\dot{Z} = 0$  線上の  $Z$  より大きな  $Z$  を考えると、 $\dot{Z} < 0$  とならなければならない。つまり、 $\dot{Z} = 0$  線より右上方の領域で矢印は左向きである。逆に、左下方の領域は  $\dot{Z} > 0$  で矢印は右向きである。 $Z$  の動きに関しては以上ですべてである。

### 4.2. $\sigma/(1+\sigma) \leq \theta < 1$ のケース

同様に  $\dot{X} = 0$  線について考える。**仮定2**に加え、**仮定1**を考慮してはじめに  $\sigma/(1+\sigma) \leq \theta < 1$  のケースを考えよう。具体的には、例えば  $\theta = 0.8$  などを想定すればよい。このとき、 $a_{12}$  の第1項はプラス、第2項もプラスで全体としてプラスである。 $a_{11} > 0$  であったから、(12)より、 $(Z, X)$  平面において  $\dot{X} = 0$  線の傾きはマイナスである。 $\dot{X} = 0$  線を具体的に求めると、 $X = \frac{\rho}{\theta} - \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right) \delta\sigma\tau Z^{\alpha+\epsilon} - \left(\frac{\alpha-\theta}{\theta}\right) (1-\tau)Z^{\alpha-1}$  を得る。端点のプロパティは、いくつかのパラ

メータ値に注意すると、 $Z \rightarrow 0$ で $+\infty$ 、 $Z \rightarrow +\infty$ で $-\infty$ である。次に位相を確認する。(10)を見よ。 $X$ を固定し、 $\dot{X} = 0$ 線上の $Z$ より大きな $Z$ を考えると、 $\dot{X} > 0$ とならなければならない。つまり、 $\dot{X} = 0$ 線より右上方の領域で矢印は上向きである。逆に、左下方の領域は $\dot{X} < 0$ で矢印は下向きである。はじめに置いた仮定および想定の下での $X$ の動きに関しては以上で明らかになった。これまでの結果をまとめてから、位相図を描くことにしよう。

リマーク 1

仮定 1, 仮定 2, そして $\sigma/(1+\sigma) \leq \theta < 1$ の下で、 $\dot{X} = 0$ 線より右上方では $\dot{X} > 0$ に、左下方では $\dot{X} < 0$ になり、 $\dot{Z} = 0$ 線より右上方では $\dot{Z} < 0$ に、左下方では $\dot{Z} > 0$ になる。

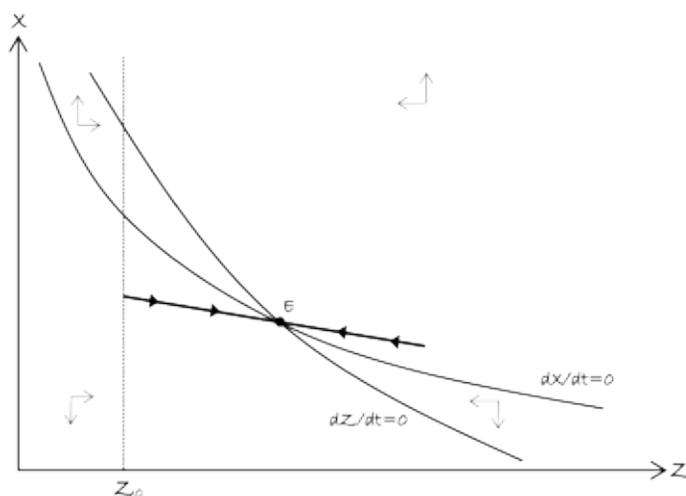


図 1 :  $\sigma(1+\sigma) \leq \theta < 1$ の場合の大域的安定性 (1)

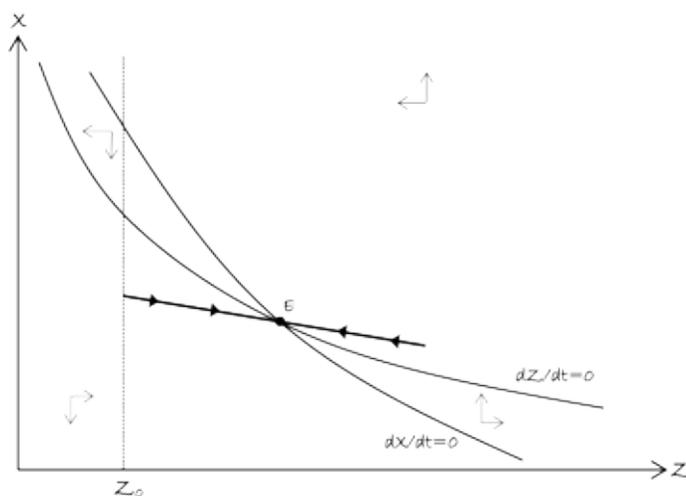


図 2 :  $\sigma(1+\sigma) \leq \theta < 1$ の場合の大域的安定性 (2)

表1：パラメータ値と  $X^*$  および  $Z^*$  の値

$\sigma$	$\theta$	$\rho$	$\alpha$	$\tau$	$\delta$	$\epsilon$	$X^*$	$Z^*$
0.5	1.5	0.05	0.35	0.02	0.2	0.4	0.223	8.553

以上より、いくぶん限定されたケースではあるが、大域的分析を展開する準備が整った。 $\dot{X} = 0$ 線も $\dot{Z} = 0$ 線もともに分析平面で右下がりであり、端点のプロパティも共通することから、アナリティカルには2つのケースが考えられる<sup>6)</sup>。

図1と図2では、 $\dot{X} = 0$ 線と $\dot{Z} = 0$ 線の位置関係が逆になっている。しかしながら、ユニークに決まる長期均衡への大域的なサドル経路安定性は共通しており、安定アームの形状も類似したものとなっている。すなわち、定常均衡よりも低位（資本蓄積が進んでいないという意味で）の経済状態から出発する一般的なケースでは、移行動学過程（process of transition dynamics）において、 $X = C/K$ は漸減していくことがわかる。これは資本蓄積を反映した動きと見ることがができる。一方で、そうした資本蓄積のプロセスを反映して、 $Z = K/H$ は増加していく。このような大域的動学パターンは、直感的にも理解できる結果である。

#### 4.3. $\theta > 1$ のケース

最後に最も複雑なケースを考えていこう<sup>7)</sup>。 $\theta$ が1より大きいケースである。 $\dot{Z} = 0$ 線は前節のケースと同じである。問題は $\dot{X} = 0$ 線の方で、より具体的には $a_{12}$ の符号についてである。段階をふみながら分析を進めていこう。

ここでは $\theta$ について特定の値を想定してみる。 $\theta=1.5$ としてみる。すると、 $a_{12}$ の第1項はマイナス、第2項は**仮定2**よりプラスとなり、全体として符号は不確定となる。アナリティカルにはこれ以上の前進は困難だ。よって、次善の策として数値で「あたり」をつけることを試みる。各パラメータ値は原論文で採用されているベンチマーク値を使用し、そこから計算された $X^*$ と $Z^*$ の値を各パラメータとともに $a_{12}$ にあてはめる。あてはめの計算に使用するものを表1にまとめて示す。

これらの値の下で、 $a_{12}=0.003090 > 0$ を得る。つまり、 $\sigma/(1+\sigma) \leq \theta < 1$ と限定した前節のケースと一緒にである。これより、以前と同様のダイナミクスになる、と一安心する。ここまですまると、 $\theta > 1$ のケースでも、 $(Z, X)$ 平面で $\dot{X} = 0$ 線はマイナスの傾きをもつとすることができる。

しかしである。 $\theta > 1$ だと、 $\dot{X} = 0$ 線の端点のプロパティを確認する過程で次の重要な事実が判明する。 $Z \rightarrow 0$ で $+\infty$ は変わらない。ところが、 $Z \rightarrow +\infty$ とすると、 $X$ は $+\infty$ となる。一般的な領域で曲線が右下がりであるのに、 $Z$ を $+\infty$ にとばすと、 $X$ が $+\infty$ になるというのは一体どういうこと生じているのだろうか。しばし考えると、ある可能性が浮かんでくる。 $(Z, X)$

6) もちろん、特定のパラメータの組み合わせの下では、曲線どうしの位置関係は確定するだろう。

7) 効用関数を提示した際の仮定より、 $\theta \neq 1$ である。なお、 $\theta = 1$ の場合は、対数線形の効用関数となる。

平面において、曲線がU字型（お椀型）の形状になっている可能性である。こうなると絵を描いてみるしかない。適当なソフト（本稿では MATLAB）を用いて作図して確認してみよう。表1のパラメータのもとで作図すると、まず図3が得られる<sup>8)</sup>。

図3は  $Z$  の値を限定して描いており、モデルの一般的な状況をあらわしていると言えよう。この範囲では、確かに右下がりの  $\dot{X} = 0$  線が生成される。図4は  $Z$  について想定される現実的な値を超えて、非常に大きな値までとって描いたものである。これで何が起きているのかがわかる。予想通りの状況である。図4を見ると、いびつではあるがU字型曲線になっていることが確認できる。数値例を経由して確認したマイナスの傾き、端点のプロパティの両方と整合する。これらの観察から1つよい発見がある。前節では位相図が2パターンであったが、ここでは1つに限定できる。均斉成長均衡がユニークに決まることを考慮すると、 $\dot{Z} = 0$  線が左上方から  $\dot{X} = 0$  線を1回切るパターンしか起こり得ない。

また、現在のパラメータの設定と(10)だけを見ると、 $\dot{X} = 0$  線周りの  $X$  の挙動が前節とは逆になるケースも否定できない。ちなみに、そうだとすると、 $\dot{Z} = 0$  線に関連する  $Z$  の挙動は変わらないから、位相図を描くとわかるように長期均衡は大域的に安定(sink)となる。しかしながら、局所的安定性を確認した際に、**仮定1**のみでサドル経路安定性が言えた。話を総合すると、少なくとも現在の特定のケース（ $\theta > 1$  で、特に  $\theta = 1.5$  の場合）においては、 $X$  の挙動も前節と同様になり、最終的に大域的なサドル・パスが得られるものと考えられる。位相図を提示する前に、本節での結果をまとめておこう。

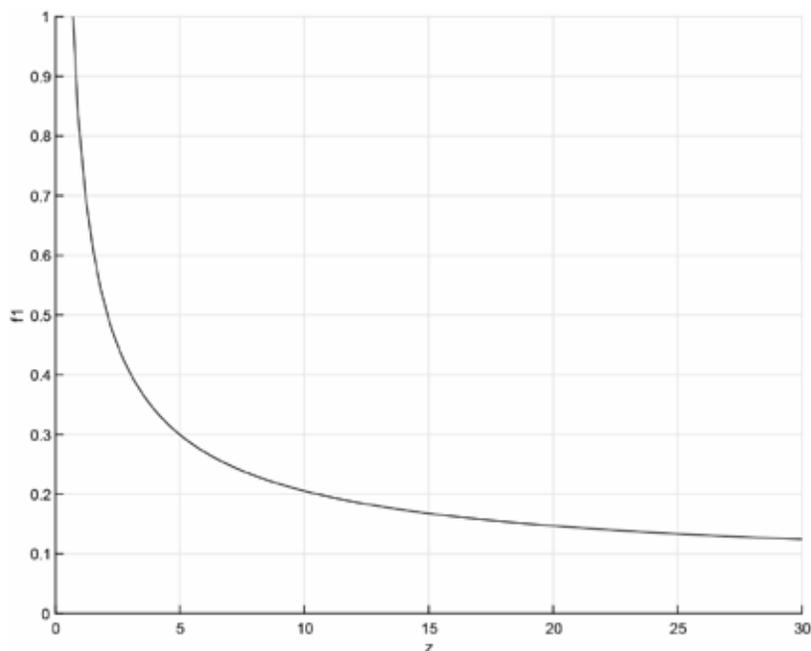


図3：  $\theta > 1$  の場合の  $\dot{X} = 0$  線（標準的な  $Z$  のケース）

8) 図の縦軸について、 $f1 = X$  である。以下、同様である。

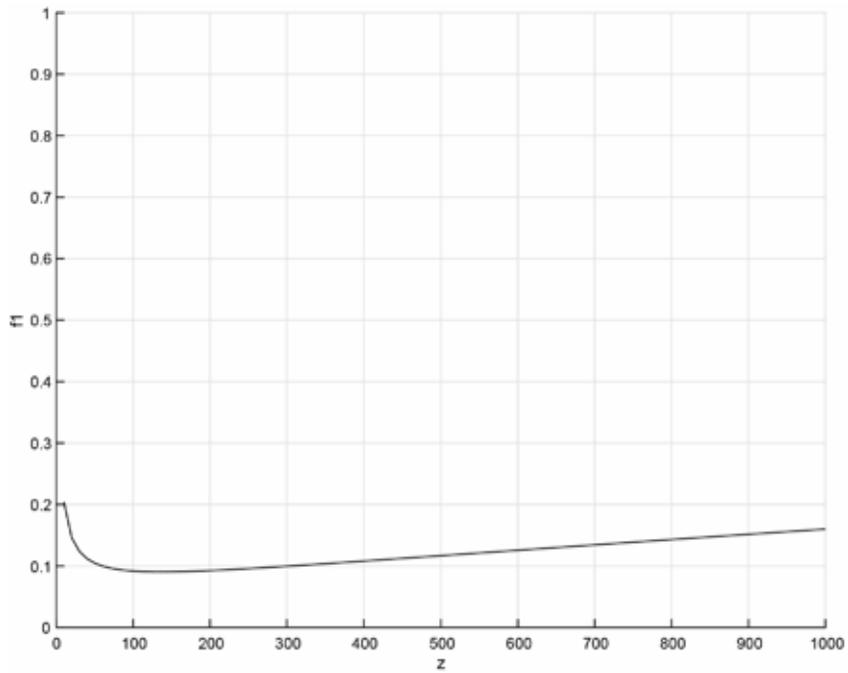


図4： $\theta > 1$  の場合の  $\dot{X}=0$  線（広範囲な  $Z$  のケース）

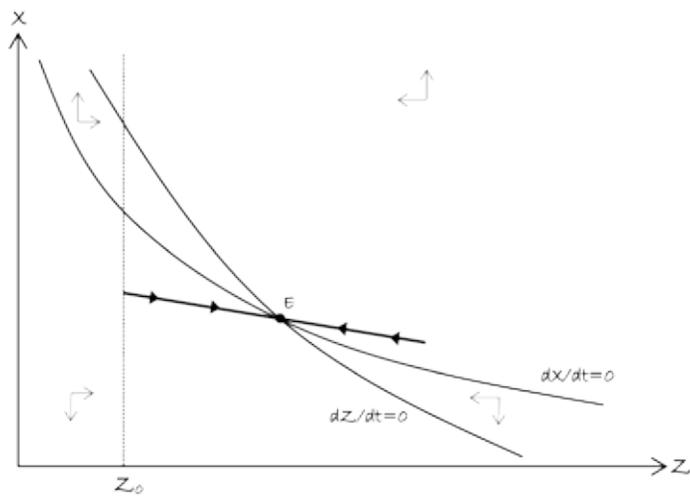


図5： $\theta > 1$  の場合に予想される大域的安定性

リマーク2

仮定1, 仮定2を再び採用する。 $\theta > 1$ の場合について, 一般性をもった見解を導出したいが難しい。そこで $\theta = 1.5$ と特定化する。仮定1のみで局所的なサドル経路安定性が得られたことをふまえると, 基本的なプロパティは次のようになると予想される。 $\dot{X} = 0$ 線より右上方では $\dot{X} > 0$ に, 左下方では $\dot{X} < 0$ になり,  $\dot{Z} = 0$ 線より右上方では $\dot{Z} < 0$ に, 左下方では $\dot{Z} > 0$ になる。

リマーク2に対応する状況は, 図1と同等であるが, あらためて図5として再掲しておく。均衡点に収束するアームの形状も以前と同じであるから, モデルのダイナミクスも類似したものになると考えられる。

ある部分の曖昧さは残ってしまったが, 以上で本稿の目的は概ね達成することができたと言ってよいだろう。最後に,  $\sigma/(1+\sigma) \leq \theta < 1$ の場合の $\dot{X} = 0$ 線の形状を数値的に確認して稿を閉じたい。図6から,  $\theta = 0.8$ のとき, 広範囲の $Z$ に対して曲線が右下がりの形状(マイナスの傾き)となることを確認でき, アナリティカルな分析結果と合致する。

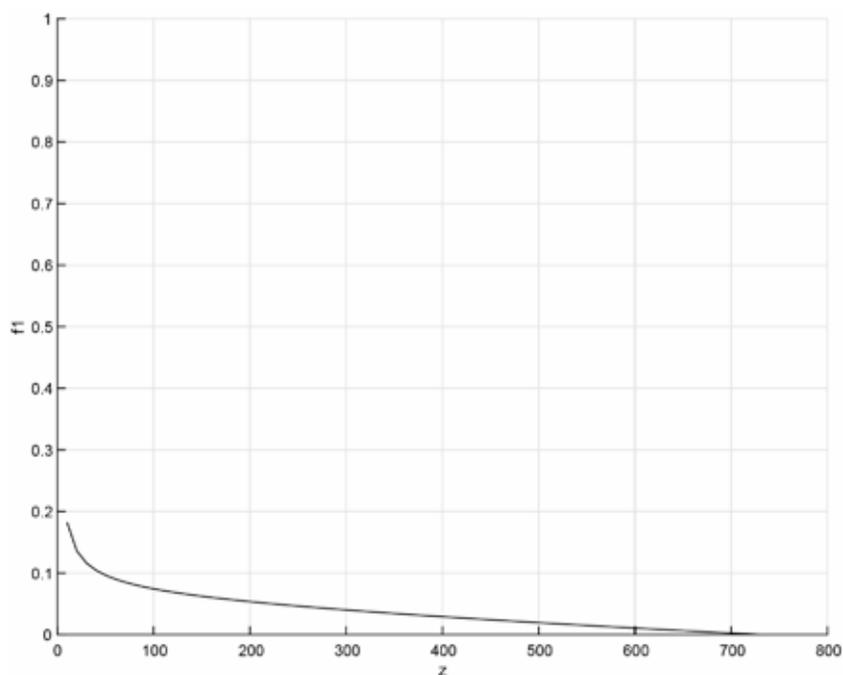


図6 :  $\sigma/(1+\sigma) \leq \theta < 1$ の場合の $\dot{X} = 0$ 線 ( $\theta = 0.8$ )

## 参考文献

- Acemoglu, D., (2009) Introduction to Modern Economic Growth. Princeton, Princeton University Press.
- Aghion, P., Howitt, P., (1998) Endogenous Growth Theory. Cambridge, MA, MIT Press.
- Aghion, P., Howitt, P., (2008) The Economics of Growth. Cambridge, MA, MIT Press.
- Barro, R.J., Sala-i-Martin, X., (1995) Economic Growth. New York, McGraw-Hill [バロー, R.J., サラ-イ-マーティン, X. [著], 大住圭介 [訳] (1998) 『内生的経済成長論 I・II』九州大学出版会].
- Barro, R.J., Sala-i-Martin, X., (2003) Economic Growth, 2nd ed. Cambridge, MA, MIT Press [バロー, R.J., サラ-イ-マーティン, X. [著], 大住圭介 [訳] (2006) 『内生的経済成長論 I・II [第2版]』九州大学出版会].
- Benhabib, J., Perli, R., (1994) Uniqueness and indeterminacy: On the dynamics of endogenous growth. *Journal of Economic Theory* 63(1), 113-142.
- Blanchard, O.J., Fischer, S., (1989) Lectures on Macroeconomics. Cambridge, MA, MIT Press.
- Futagami, K., Morita, Y., Shibata, A., (1993) Dynamic analysis of an endogenous growth model with public capital. *Scandinavian Journal of Economics* 95(4), 607-625.
- Hosoya, K., (2014) Accounting for growth disparity: Lucas's framework revisited. TGU-ECON Discussion Paper Series No. 2014-3 (Faculty of Economics, Tohoku Gakuin University).
- Hosoya, K., (2015) Importance of a victim-oriented recovery policy after major disasters. TGU-ECON Discussion Paper Series No. 2015-3 (Faculty of Economics, Tohoku Gakuin University).
- Romer, D., (2011) Advanced Macroeconomics, 4th ed. New York, McGraw-Hill.
- 岩井克人 (1994) 「経済成長論」, 岩井克人・伊藤元重 [編] 『現代の経済理論』第7章所収, 東京大学出版会, 265-324.
- 齊藤誠・岩本康志・太田聰一・柴田章久 (2010) 『マクロ経済学』有斐閣.
- チャン, A.C. [著], 小田正雄・仙波憲一・高森寛・平澤典男 [訳] (2006) 『動学的最適化の基礎』シーエーピー出版.
- 中田真佐男 (2011) 『基礎から学ぶ動学マクロ経済学に必要な数学』日本評論社.
- 西村清彦 (1990) 『経済学のための最適化理論入門』東京大学出版会.
- 脇田成 (1998) 『マクロ経済学のパースペクティブ』日本経済新聞社.