

【論 文】

公理的手法を用いた負の数に対する演算の指導法

星 野 真 樹

1. はじめに

学校数学における数の扱いは、小学校の算数における自然数に始まり、分数や小数という表現によって比較的早い段階で正の有理数を扱うが、負の数を扱うことは中学校の数学まで待たなければならない。このような学校教育における数の導入方法は、公理によって自然数を定義し、その拡張として整数、さらに有理数や実数を構成するような数学的な数の構成とは明らかに異なる。そこには、負の数の学習には困難が伴うという背景があり、教育的に配慮された指導順序であることが伺える。実際、歴史的にも負の数が認められるのは正の有理数よりも後のことであった。そして、そもそも「数」とは何かという答えには、さらなる時間を要することになる。数はこのように身近でありながら、奥深い対象でもある。

そこで、本稿では正負の数の演算に関する公理的な手法を用いた指導法を提案する前に、まず、現行の代表的な指導法を振り返ることとする。次に、公理的に自然数や整数を構成する方法を確認しながら、中学校における負の数の演算の指導につなげることができる「形式不易の原理」について述べる。そして負の数の演算について、この原理を用いた公理的な手法を用いた指導法を提案する。最後に、この手法の長所や問題点についても触れることとする。

本稿の執筆にあたって、現行の指導法に関しては [1] や中学校で実際に使われている代表的な教科書 [4] を参考にした。また、公理的な数の構成については主に [2] や [3] に従ったが、紙面の都合上、多くの証明の他、有理数や実数の構成などについて割愛せざるを得なかった。興味がある読者には、これらの文献の他に [5], [6] も参考になるだろう。

2. 負の数とその演算の現行の指導法について

・負の数の導入と指導法

中学校の数学における負の数の導入の際には温度、移動、利益と損失、得点など身近な具体例を通し、「反対の性質を持つ数」や「基準より少ない量」の必要性を確認することから

始められる。そして、0 を基準にしてそれより大きい数を正の数、小さい数を負の数として符号をつけて表現することによって正負の数を導入し、負の数の範囲を含む数直線が指導される。さらに、それを用いて負の数を含む大小関係や、数直線上の原点からの距離として絶対値の概念なども導入される。

・加減法の意味と演算の指導演法

次の段階は、これまでの順序集合としての正負の数の扱いから、演算可能な集合としての取り扱いである。まず既習の正の場合の加減法を含むように捉えさせる必要があることに注意する。つまり、これまでの演算の拡張として指導されなければならない。そこでその指導方法としては、正負の数を数直線上のベクトルとして捉え、その加減をベクトルの加減と同一視して捉えるものと、小学校の既習事項である正の数に関する加減法から類推して、負の数の加減を正の数の加減に捉えなおすものがある。そのうえで交換法則や結合法則を「具体例」で確認することが行われ、性質としてまとめられる。その際、なぜそれらのようなことが正当化できるか、具体例以上のことは扱えず、本質的な「理由」にふれることはない。さらに移動を例とした減法を経て、加減法のまとめへ進む。

次の段階は乗法である。これについては以下で詳細に触れることにしよう。

・正負の数の乗法の意味と演算の指導演法（なぜマイナス×マイナスはプラスなのか）

現行の教科書や参考書にある代表的な正負の数の乗法に関する指導演法を確認しておこう。

① 東西の移動と時間を用いた指導演法

正負の数を、数直線上の移動を表すベクトルとして捉えたものを利用する指導演法である。例えば、東西に延びる道路を数直線として扱い、その上を一定の速度で歩く人の位置について、時間を与えて求める方法を用いる。この場合には、速さや時間に正負の符号をつけ、速さ×時間＝距離を用いて様々な移動を乗法によって表すことにより、負の数を含む乗法を合理的に解釈することになる。例えば、東向きと現在から後の時間を正、その逆を負とすると、西向きに時速 4 km で歩く人が現在から 2 時間前にいた位置は現在より 8 km 東であるから、式で表現すれば $(-4) \times (-2) = +8$ というような具合である。

② 外挿による指導演法

既知の演算である正と 0 の数に関する乗法の演算の結果から、数の規則性を見つけ、負の数の乗法でもその規則が成りたつことを仮定して値を求める方法である。実際にはまず、一方が負の数を含む乗法について、2 つの数が正である乗法の具体例から規則を考察させる。例えば $4 \times 2 = 8$, $4 \times 1 = 4$, $4 \times 0 = 0$ 等から、かける数を 1 減らすと結果は 4 減るという規則

を見つけることができるため、 $4 \times (-1) = -4$ 、 $4 \times (-2) = -8$ 等が分かる。このことを他の数でも行い、一般に（正の数） \times （負の数）のルールと（負の数） \times （正の数）のルールを作ることができる。最後に（負の数） \times （負の数）についてもこれまでの事実から、同じように規則を見つけることができる。例えば、これまでの既習事項の $(-4) \times 2 = -8$ 、 $(-4) \times 1 = -4$ 、 $(-4) \times 0 = 0$ などから、かける数を1減らすと結果は4増えるという規則を見つけることができるため、 $(-4) \times (-1) = 4$ 、 $(-4) \times (-2) = 8$ となることが分かる。このことを他の数でも確認することによって一般の（負の数） \times （負の数）のルールについてまとめていく方法である。

③ 既知の計算方法から導く指導法

既知の演算である正の数に関する乗法を加法に直して捉えさせ、その拡張として指導する方法である。例えば $4 \times 2 = 4 + 4 = 8$ から 4×2 は4を2回加えたものであるから、 $(-4) \times 2$ も-4を2回加えたものと考え、 $(-4) \times 2 = (-4) + (-4) = -8$ であるとする方法である。次に（正の数） \times （負の数）については、負の数が反対の意味を表すことに注目して、「負の回数加える」ということを「その回数ひく」ということに解釈することにして指導する。例えば $4 \times (-2)$ は4を2回分引くと考えて $-4 - 4 = -8$ のように捉えさせる。同様に、負の数どうしの積も負の数の減法の回数を表すと考えることにすれば、その符号が正になることが分かる。また（正の数） \times （負の数）については正の数の乗法に関する可換性から指導することもできる。例えばこれまでの例を用いると、 $4 \times 2 = 2 \times 4$ であるからそのアナロジーとして $(-4) \times 2 = 2 \times (-4)$ が得られるとする指導法も可能であるだろう。

以上、どの指導法で行っても、交換法則（交換法則を乗法の導出に用いない指導をした場合）や結合法則を「具体例」で確認することが行われ、性質としてまとめられる。この際も、加法でもそうであったように、なぜそれらのようなことが正当化できるか、具体例以上のことは扱えない。その本質的な「理由」については後で触れることになる。

・ 現行の指導法の課題

これらは教育的によく考えられた指導法ではあるが、実際には計算ルールの「説明」でしかないため、成立する理由にどこか曖昧なイメージが残ってしまう可能性がある。また、東西の移動で乗法を導入する場合、速度と時間に関する式が出てくるため、数学の内容以前に、このことに関して抵抗があるため負の数の演算に進めない生徒が出てくる可能性もある。さらに、東西の移動によって正負の演算を理解したとしても、時間や距離が出てこない一般の数に対し、そのような計算をしてよいものか疑問が起るかもしれない。一方で、外挿法はあ

くまで帰納的に説明をしているに過ぎないので、このことに疑問をもつ生徒が出てきても不思議でない。そこで以下では、公理的手法を用いた負の数を含む乗法に関する指導法を提案する前に、まず公理的な「数」の構成と演算について厳密に振り返ることから始めることにしよう。

3. 数の公理的な構成と演算

・自然数

まず、身近な「自然数」についてその概念と構成について考えてみよう。自然数の概念は、我々が小学校で学んだように、ものを「数える」ということから得られる。自然数には、基数（ものの個数）と順序数（順番）の二種類の概念があるが、ここで示すのは後者による定義である。このような自然数を初めて厳密に定義したのは G. Peano (1891) であってそれほど古くなく、むしろ数学の歴史を考えれば新しい概念である。つまり、このような「一見当たり前に見えるようなもの」の厳密な扱いは実は簡単なことではなく、「自然数」とその演算が何かを定義することが難しいことを示唆している。まず自然数の定義と記数法を与えその性質を考察する。

定義（自然数） 無定義語としての「1, 数, その後者」と次の 5 つの公理をみたす数の集合 N を自然数の集合といい、 N の要素を自然数という：

- ① 1 は数である。つまり $1 \in N$ が成り立つ。
- ② 各 $x \in N$ に対して x の後者 x' が存在し N に属する。つまり $x' \in N$ が成り立つ。また x' は x の次の数ともいう。
- ③ $x \in N$ ならば、 $x' \neq 1$ である。
- ④ $x' = y'$ ($x, y \in N$) ならば、 $x = y$ である。
- ⑤ [数学的帰納法の公理] 集合 M において以下の 2 つの条件を満たすならば、 $M = N$ である。
 - $1 \in M$,
 - $m \in M$ ならば $m' \in M$ がみたされる

・自然数の記数法

ペアノの公理から構成された自然数は実際に表すと

$$N = \{1, 1', 1'', 1''', 1'''' , 1''''' , \dots\}$$

である。これを適当な記数法によって表すことを考えよう。まず、10進法で表示することを考える。この場合には、通常0から9の10個の数を用い、 $1' = 2, 1'' = 2' = 3, 1''' = 2'' = 3' = 4, \dots$ のように対応させる：

$$N = \{1, 1', 1'', 1''', 1'''' , \dots\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

これは我々が日常で通常使っている自然数であり、2や3は単に「数の表し方」である。実際、以下のように他の記数法でも良い。例えば2進法で表示する場合には、通常0と1の2個の数字を用い $1' = 10, 1'' = 10' = 11, 1''' = 10'' = 11' = 100, \dots$ のように対応させる：

$$N = \{1, 1', 1'', 1''', 1'''' , \dots\} = \{1, 10, 11, 100, 101, 110, \dots\}.$$

・自然数の性質

ペアノの公理系をみたす自然数の集合は存在して（同型を除いて）一意的である。実際、以下が成り立つことを示すことができる：

定理 $n \neq m$ ならば $n' \neq m'$ である。

定理 $n' \neq n$ である。

定理 $n \neq 1$ ならば $n = m'$ となる数 m が唯一存在する。

さらに、ペアノの公理から定まる数はその定義からわかるように、1列に並ぶ全順序集合の構造を持っている：

$$1 < 1' < 1'' < 1''' < 1'''' < \dots \Leftrightarrow 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < \dots.$$

・加法と乗法

自然数の集合が定義されたが、ここからその集合に演算を定義してその性質を見ていくことにする。まずは加法から始めることにしよう。

定義（加法） 2つの自然数 m, n に対し次の式で n に m を加えるという演算を以下で定め $n+m$ で表し、これを n と m の和という。またこの演算を加法という。

$$\textcircled{1} \quad n \in N \text{ に対し } n+1 = n'$$

$$\textcircled{2} \quad n+m' = (n+m)'$$

実際にこの定義を用いた自然数の計算例を挙げておこう：

$$1+1 = 1' = 2, 2+1 = 2' = 1'' = 3, 3+1 = 3' = 1''' = 4, 2+2 = 2+1' = (2+1)' = (2')' = 2'' = 4.$$

一見当たり前の計算でも、定義に従って計算を行うことはこのようになり面倒なことになる。また、この立場では、良く知られている以下の計算法則についても「証明」がある。

ここでは、加法の結合法則についてのみ証明も示しておくことにする。

定理 3つの自然数 a, b, c に対し加法の結合法則が成立する：

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

証明 a, b を選んで固定し c に関して証明を行う。 $M = \{c \mid (a+b)+c=a+(b+c)\}$ とおく。

まず $(a+b)+1=(a+b)'=a+b'=a+(b+1)$ から $1 \in M$ が分かる。次に $c \in M$ とすると $(a+b)+c=a+(b+c)$ が成りたち、 $(a+b)+(c+1)=(a+b)+c'=((a+b)+c)'=(a+(b+c))'=a+(b+c)'=a+(b+c')=a+(b+(c+1))$ である。よって $c+1=c' \in M$ であるからペアノの公理⑤より $M=N$ が成りたつ。■

定理 自然数 n と m に対し加法の交換法則が成立する：

$$n+m=m+n.$$

定理 自然数 a, b と n に対し $a+n=b+n$ ならば $a=b$ である。

・自然数の大小と差・減法の定義

次に自然数の大小について定義し、その差を考えることができるようにしよう。

定義 2つの自然数 a, b に対し $b=a+n$ であるような n が存在する場合 $a < b, b > a$ と定義する。

また $a < b$ または $a = b$ のとき $a \leq b$ で表す。

定義 (自然数の差) 自然数 a, b に対し $a=b+x$ をみたす自然数 x が存在するときこの x を $a-b$ と表し、 a から b を引いた差という。またこの x を求める演算を減法という。

次は「乗法」について定義しその性質を確認していこう。

定義 (乗法) 2つの自然数 m, n に対し次の式で n に m をかけるという演算を $n \times m$ または単に nm で表し、以下の式で定める：

- ① $n \in \mathbb{N}$ に対し $n \times 1 = n$
- ② $n \times m' = nm + n$ あるいは $n(m+1) = nm + n$

これを n と m の積という。またこの演算を乗法という。

この定義に従って、具体的に計算した例を3つ挙げておく：

$$5 \times 1 = 5, 5 \times 2 = 5(1+1) = 5 \times 1 + 5 = 5 + 5 = 10, 5 \times 3 = 5(2+1) = 5 \times 2 + 5 = 10 + 5 = 15.$$

加法で既に見てきたように、乗法の計算でも定義に従って演算を行うことは面倒な計算を伴う。また、この立場では、良く知られている以下の乗法に対する計算法則についてもやはり「証明」があるが、詳細は参考文献に譲ることにしよう。

◆自然数の乗法に関する法則

- 自然数 n と m に対し積の交換法則が成立する： $nm=mn$
- 3つの自然数 a, b, c に対し分配法則が成立する：

$$(a+b)c=ac+bc, \quad a(b+c)=ab+ac,$$

- 3つの自然数 a, b, c に対し積の結合法則が成立する： $(ab)c=a(bc)$
- 自然数 a, b と n に対し $an=bn$ ならば $a=b$

ここで、以下の議論では特に使わないが除法の定義も一応述べておくことにする。

定義 自然数 a, b に対し $bx=a$ をみたす自然数 x が存在するとき、 x を $a \div b$ または a/b と表し、 a を b で割った商という。またこの x を求める演算を除法という。

これで、自然数の演算について我々が知っていることが一通りできるようになった。

・整数の構成

ここまで構成した自然数とその演算を基に、ペアノの公理を拡張して整数を構成することを試みる。その際、以下のことが基本となり、形式不易の原理と言われる：

1. 新しい数の集合は自然数と同一視できる数の集合を含む。
2. 任意の元 a, b に対して $a < b, a=b, a > b$ のいずれかが成立する。
3. 加法・乗法が定義され、結合法則、分配法則、結合法則を満たす。

整数や他の数は、この原理を満たすように構成されていることが今後の議論や指導の上で重要となってくる。まず 0 を定義することから始めよう。

定義（ゼロ） 1 を後者とする新しい数を考えてそれを 0 で表す。つまり $0' = 1$ である。またこれは $0+1=1$ を意味する。さらに、可換であるように定めるため $1+0=1$ とする。

定義（負の数） 自然数 n に対して 0 から n 番目の前者の数を考え $-n$ で表す：

$$n+(-n)=0, \quad (-n)+n=0$$

このように定義された数 $-n$ を負の数という。

定義（整数と2つの整数の差） 整数の集合 Z とは自然数、 0 、負の数を合わせた数の集合であるとし、整数 a, b に対し整数 x が存在して $x+b=a$ のとき $x= a-b$ と表し a と b の差という。

この整数の集合 Z に形式不易の原理が成立すると考え、自然数の場合に成立していた法則が全て成りたつと考える：

◆ a, b, c を整数とすると、加法・乗法に関して以下の法則が全て成り立つ。

1. $(a+b)+c=a+(b+c)$

2. $a+b=b+a$
3. $(ab)c=a(bc)$
4. $ab=ba$
5. $a(b+c)=ab+ac, (a+b)c=ac+bc.$

この原理によって、整数の演算が満たす様々な性質を示すことができる。

定理 $0+0=0$ が成り立つ。

証明 $(0+0)'=(0+0)+1=0+(0+1)=0+1=0'$ が得られペアノの公理④より $0+0=0$ である。■

以下、後で本質的に用いる 0 に関する乗法の定理についてのみ、証明をつけておく。

定理 1 は積に関する単位元である。つまり、任意の整数 a に対して $a \times 1 = 1 \times a = a$ が成り立つ。

定理 0 は加法に関する単位元である。つまり、任意の整数 a に対して $0+a=a+0=a$ が成り立つ。

定理 整数 a に対して $0 \times a = a \times 0 = 0$ が成り立つ。

証明 0 と 1 の演算に対する結果と分配法則を用いて $0+a=a=1 \times a=(0+1)a=0a+1a=0a+a$ である。つまり $0a+a=0+a$ が成り立ち、簡約律を用いて $0a=0$ が得られる。また、乘法に関して可換だから $0 \times a = a \times 0 = 0$ が得られる。■

このように、形式不易の原理を用いて、整数の性質について「証明」をすることができる。

・負の数の加法と減法

負の数をこのように導入すれば、減法を加法として扱えることもこの立場では定理であり、数学としては自明な事ではない。実際に以下のように証明することができる：

定理 $a+(-b)=a-b$ が成り立つ。

証明 結合法則と差の定義式を用いる：

$(a+(-b))+b=a+((-b)+b)=a+0=a$ が分かり、差の定義から $a+(-b)=a-b$ である。■

・負の数の乗法

形式不易の原理から、整数の積も自然数の積と同様にして計算することができる。1つ例を挙げておこう：

問題 $(-5) \times 2$ を形式不易の原理に従って計算せよ。

解答 自然数と同じ積の定義式を用いる： $n \times 1 = n, n(m+1) = nm + n$ から $(-5) \times 2 = (-5) \times (1+1) = (-5) \times 1 + (-5) = (-5) + (-5) = -10$

ここまで準備すると次を示すことができる：

定理 整数 a, b に対して

- (1) $a(-b) = -ab$
- (2) $(-a)(-b) = ab$

証明 $ab + (-ab) = 0$ であること、 0 の性質や分配法則を用いる：

- (1) $0 = a0 = a(b + (-b)) = ab + a(-b)$ であり、これは ab の加法の逆元が $a(-b)$ であることを示しているから $a(-b) = -ab$ である。
- (2) $0 = 0(-b) = ((-a) + a)(-b) = (-a)(-b) + a(-b) = (-a)(-b) + (-ab)$ であることから $(-a)(-b)$ は $(-ab)$ の加法の逆元 ab とみることができ、 $(-a)(-b) = ab$ であることが分かる。■

整数には上記の他に、自然数の順序対を用いて定義する方法もあるが、その方法は順序対に同値関係を入れ、それによって定められる商集合と整数を同一視して扱う立場であり、本論とは外れてしまうため、ここでは扱わないことにする。また、有理数や実数についても公理的に構成することができる。詳しくは参考文献 [2], [3], [5], [6]などを参照して頂きたい。

4. 公理的手法を用いた負の数の演算の指導法

ここでは、これまでの公理的な手法をもとに、負の数の演算を指導する方法を提案する。まず、負の数の導入と加減法については、現行の教科書の内容に準じて扱うことにする。より詳細については中学教科書や参考文献を適宜参照して欲しい。

・負の数の導入

0 を基準としてその値より小さい数として負の数を導入し、 0 の前者を表すことを指導する。実際の指導の際には数直線も用いながら、視覚的に負の数が 0 の前者を表しているということが捉えられるようにする。例えば 0 より 1 小さい数は 0 の 1 つ前の数で -1 、同様に 2 つ前の数を -2 のように表すことなどを指導する。

・負の数の加法と減法

負の数が 0 の前者を表すことから、負の数を加えることがその数の前者を示すことを指導する。例えば $5 + (-2)$ は 5 の 2 つ前になるので 3 であるように数直線上で図示しながら指導する。さらに減法は負の数を用いて加法として表せることなども指導する。

・負の数を含む乗法

ここから、負の数の乗法の指導に公理的手法として、前節で扱った形式不易の原理を取り入れて指導していくことにする。その指導の際には、具体的な数を計算させることによって、負の数の積の演算方法を導かせる。この場合、生徒には必要となる最小限の内容を確認しながら指導し、混乱を生じさせない工夫も必要であるだろう。

まず、必要になる加法に関する以下のことを確認する：

$$1+(-1)=(-1)+1=0, \quad 2+(-2)=(-2)+2=0, \quad \dots$$

次に全ての整数 a に対し 0 をかけると値が 0 であることを、 $2 \times 0 = 0 \times 2 = 0$ のように自然数に 0 をかける流れで導き、結果としてまとめておく：

法則 すべての数に対して $a \times 0 = 0 \times a = 0$ が成り立つ。

上記の法則は、通常の教科書であれば負の数の乗法を一通り指導した後で扱われる内容でもあり、生徒に断らないで用いることは避けるべきである。また、公理的な立場ではこの事実も示すべき内容ではあるが、ここでは混乱を防ぐためこれ以上触れないでおくことにする。実際、 0 に何をかけても 0 になることは、自然数の例を挙げれば生徒にとって特に証明を必要とする事とは思われず、比較的納得いく事実であるとも考えられる。

また、分配法則について正の数の例を挙げて確認しておく。例えば分配法則を使った場合と使わない場合について $2 \times (3+5)$ を計算させて等号で結べることを確認させる：

$$2 \times (3+5) = 2 \times 3 + 2 \times 5 = 6 + 10 = 16, \quad 2 \times (3+5) = 2 \times 8 = 16 \quad \Rightarrow \quad 2 \times 3 + 2 \times 5 = 2 \times 8.$$

以上の準備のもとで、負の数を含む乗法に関する次の課題を提示する。

課題 (正の数) \times (負の数), (負の数) \times (正の数), (負の数) \times (負の数) の値がどうなるか足して 0 になる数と分配法則を使って考えてみよう。

このままでは、この課題の計算と分配法則が直接結び付く生徒はあまりいないだろう。そこで、以下のように教師が具体的な導出の過程を例題によって与え、生徒が活動できるようにしておく。その際、生徒の実態に応じて、説明や過程をさらに工夫することも必要だろう。

例題 $2 \times (-3)$ の値がいくらになるか次の手順で考えよう。

- ① -3 と足して 0 になる数を考え、式に表そう。形は $\bigcirc + \square = 0$ のように表すこと。
- ② 2 と ① で求めた式の積を作ろう。ただし 2 は式の左側から両辺にかけることにする。
- ③ 左辺を分配法則を用いて展開し、計算できるところ (正の数どうしの乗法の部分) は

値を求めて式に書いてみよう。

- ④ $2 \times (-3)$ に成り立つ式と $6 + (-6) = 0$ を比較して、その値を考えよう。

解答例

- ① $3 + (-3) = 0$ ($-3 + 3 = 0$ でも良い) である。
 ② 左から 2 をかけて $2 \times (3 + (-3)) = 2 \times 0$ が得られる。
 ③ $2 \times 3 + 2 \times (-3) = 0$ が得られ、さらに計算して $6 + 2 \times (-3) = 0$ が分かる。その際、 $2 \times (-3)$ はそのままにしておいて、計算する必要はないとコメントする。
 ④ このことを $6 + (-6) = 0$ と比較することによって $2 \times (-3) = -6$ が得られる。

次に、同様な問題をこの方法を用いて考えさせる。まずは値を変えただけのものから始めるのが良いだろう。

練習 $5 \times (-2)$ がいくらになるか、例題の考え方で求めよう。

このように(正の数) \times (負の数)を計算でき、その結果をまとめることができるだろう。(負の数) \times (正の数)も同様に分配法則を用いて計算させても良いし、可換であることを認めて指導しても良いだろう。

次に (負の数) \times (負の数) がどうなるか考えさせる。

課題 $(-3) \times (-2)$ の値がいくらになるか、これまでの手順を使って考えよう。

解答例

- ① $3 + (-3) = 0$ (または $2 + (-2) = 0$ などの組み合わせでも良い) である。
 ② 右から (-2) をかけて $(3 + (-3)) \times (-2) = 0 \times (-2)$ が得られる。
 ③ $3 \times (-2) + (-3) \times (-2) = 0$ が得られ $-6 + (-3) \times (-2) = 0$ が分かる。その際、 $(-3) \times (-2)$ はそのままにしておいて計算する必要はないとコメントする。
 ④ このことを $(-6) + 6 = 0$ と比較することによって $(-3) \times (-2) = 6$ が得られる。

同様にして他の数の場合も計算が可能である。そこで、授業の残りの時間に応じて他の値で試させることも良いだろう。

この指導法を用いた別な展開として、特に $(-1) \times 1 = 1 \times (-1) = -1$, $(-1) \times (-1) = 1$ を示した後で、他の数の乗法をこれらの積と正の数の積に帰着する指導方法もある。例えば

$$\begin{aligned} (-2) \times 3 &= ((-1) \times 2) \times 3 = (-1) \times (2 \times 3) = -1 \times 6 = 6, \\ (-2) \times (-6) &= ((-1) \times 2) \times ((-1) \times 6) = ((-1) \times (-1)) \times (2 \times 6) = 1 \times 12 = 12 \end{aligned}$$

のような計算をさせることによって、一般的な負の数の乗法に関しても 1 と -1 の 2 つの数の乗法の結果を用い既知の計算に帰着可能であることを指導する。

いずれにせよ、以上のことから、負の数の乗法に関する演算の規則をまとめさせることができるだろう。

5. まとめ

ここまで簡単にはあるが、中学校における負の数の代表的な指導法と、新たな提案として、公理的な手法を用いた指導法について考察してきた。

前に指摘した通り、前者の指導法である移動の概念を用いた指導は、そのイメージが理解できる生徒には効果的な反面、意味に依存しているため一般的に成立するかということについては実は答えていない。また、外挿による指導法は、乗法の数の規則性から帰納的に演算のルールを考えるため、意味に依存せず、表を用いる等の工夫次第で非常に分かりやすい指導を行えるが、計算の法則に関して類推の域を出ていない。

一方、ここで提案した後者の指導法は、代数的な処理のみで完結する方法であるため、従前の指導法に比較すると曖昧な点が比較的少なく、意味に依存しないため一般的に成り立つことも分かりやすい。しかしながら、導出に分配法則を使っている点からも分かるように天下一的であり、そもそもなぜそのような計算を持ち出すのかが分かり難く、計算も無味乾燥であるため、意味をつけないと納得できないタイプの生徒には向かない可能性がある。ただし、導出過程に意味がつかないところが、逆に一般的に成り立つという点においては長所にもなり得るため、意味を何かしらでつける指導との間ではそれぞれ一長一短あると思われる。

また後者のような指導を行う場合、他の課題や問題点もある。例えば、途中でも簡単に触れた 0 をかけると任意の数が 0 になる事実や、また今回は特に触れなかったが 1 をかけると値は変わらない等の指導について、どこまで踏み込んでどのように指導を行うかは事前によく検討しておかなければならない。さらに、今回の指導法では触れなかったが元の一意性についても使用している部分があり、後者の指導法の立場をとったからと言って、全てを中学生に向けて明らかにしているわけではないことは、指導上注意しておく必要がある。つまり、

どの部分までを既知の事実として受け入れさせるか、また具体例で認めさせるかなど、指導する教員も事前に明確にしておかなければならない。

結局、どの指導法によっても何かしらの不完全な印象は拭えないかもしれない。しかし、このような立場の指導法もあるのではないかと、この可能性をここに示した次第である。

参考文献

- [1] 数学教育研究会編，数学教育の理論と実際，聖文新社（2010）
- [2] 遠山 啓，代数的構造，筑摩書房（2011）
- [3] 樋口禎一，池田敏和，渡邊公夫，数学科教育法 — 中学・高校数学における基礎・基本（数理情報科学シリーズ），牧野書店（2007）
- [4] 藤井斉亮，俣野宏他，新しい数学 1，東京書籍（2013）
- [5] ペアノ（小野勝次，梅沢敏郎訳），数の概念について，共立出版（1969）
- [6] ランダウ（蟹江幸博訳），数の体系，丸善（2014）