

# 散逸系の量子論

高 橋 光 一

減衰調和振動子をモデルとしたエネルギー散逸系の正準量子化の試みには長い歴史がある。これまで提案されたすべての正準量子化法は、量子力学の基本原則すなわち安定な真空の存在と Heisenberg の不確定性原理に反する結果を生じることが知られていた。Takahashi (2018a, b) の方法は、この問題を解決し他のモデルに適用する上での新しい展望をもたらした。散逸系の量子化に伴う問題を、歴史と最近の研究に基づいて論じる。

**重要語句：** 散逸と拡散，減衰調和振動子，Bateman 系，時間反転共役，量子化，不確定性原理

## 1. 散逸と拡散

### 1.1 熱力学第 2 法則と散逸

熱力学には 3 つの基本法則がある。熱力学という理論体系が正しく成立する理想的な系を想定し、その系を記述するために準備された諸概念（ここでは詳しい定義を与えない）を用いて、それらの法則は次のように表現される。

**第 1 法則：** 熱エネルギーを含めた全エネルギーは保存する。

**第 2 法則：** 閉鎖系では、エントロピーは一定か増大するかである。

**第 3 法則：** すべての平衡系は、絶対温度が 0 に近づくとエントロピーが等しく 0 になる。

これに次の第 0 法則を加えることもある：

**第 0 法則：** 3 つの系があって、第 1 と第 2 の系が熱平衡にあり、第 2 と第 3 の系が熱平衡にあれば、第 1 と第 3 の系は熱平衡にある。

本稿の主題と直接関係するのは、エントロピーについて述べた第 2 法則<sup>1</sup>である。

熱い系は熱エネルギーを持つという。熱ければ湯を沸かし蒸気機関を動かして仕事をさせる

---

<sup>1</sup> スノウ (Snow CP) は、1959 年にケンブリッジ大学のリード講演で“二つの文化”について語った。このとき科学リテラシーのテスト材料として持ち出したのがこの法則だった。

ことができるので、熱をエネルギー (= 仕事をする潜在力) の一形態と考えるのである。逆に、系に力を加え仕事をして系に熱を持たせることもできる。

知られているいろいろなエネルギーは相互に転化しうが、その総和は不変である。これが、我が宇宙での最も基本的な法則であるエネルギー保存則である。従って、熱エネルギーで仕事をすることもできる。しかし経験によれば、平衡に近づく過程で、熱で仕事をさせる効率は悪くなり、すべてが平衡状態になると仕事はまったくできなくなる。仕事として使える部分が減少することを、エントロピーが増大するという。エントロピーは、おおまかにいえば単位温度<sup>2</sup>あたりの熱エネルギーである。温度 ( $T_A$ ) が高い A 系と温度 ( $T_B$ ) が低い B 系があって共に同じ熱エネルギー  $Q$  を持っているとき、 $Q/T_A < Q/T_B$  なので A 系のほうがエントロピーが小さい。ということは、外部に仕事をする潜在力は A 系が大きいということである。水が高所から低所に流れ落ちるときに水車を廻したり発電したりすることができるように、経験によれば、熱も高温部から低温部に流れるときに外部に仕事をするのできるのである。

この A 系と B 系を接触させ、熱の移動によって十分長い時間の後に<sup>3</sup> 平衡状態になるまで待つ。このとき、熱は温度の高い系 A から温度の低い系 B に移動し、平衡状態では全系は中間の温度 ( $T_C$ ) になる。最終的には、エントロピーは増大する。

変化は図 1 の矢印の方向に従って起き、逆の方向に進むことはないというのが、第 2 法則の述べるところである。A を我々が関心を持つ小さな系 (電気釜など)、B をその周りの環境 (台所など) とすると、小さい高温系から低温の環境へ移った熱は取り戻せないということもできる。これが熱エネルギーの散逸である。散逸によって熱エネルギーの分布は一様化する。結果として、部分系 A と B の熱力学的個性は失われる。

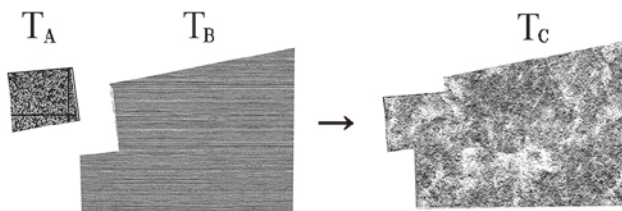


図 1 温度  $T_A$  の系と温度  $T_B$  の系 ( $T_A > T_B$ ) を接触させ長い時間待つと  $T_A > T_C > T_B$  なる温度  $T_C$  になる。

<sup>2</sup> 以下で“温度”は絶対温度 ( $-273.15^{\circ}\text{C} = 0\text{ K}$ ) のことである。

<sup>3</sup> 2つの系は、接触させてじゅうぶん長い時間放置すれば、温度・圧力・密度がもはや変化しない状態になる。特に、温度・圧力は同じになる。これが熱平衡であるが、“じゅうぶん長い”とはどれだけの時間だろうか。箱に閉じこめられた酸素は、“じゅうぶん”長い時間の後、壁の物質と結合したり、壁の穴に吸着されたり、壁をすり抜けたりする。実は「熱平衡」状態にはなり得ない。そういう細かいことは考えず、短すぎず長すぎない時間を考えようというのがここでの暗黙の約束である。温度計で温度を測ることができるというのもこの約束に基づいている。

似た現象に拡散がある。水に塩を入れると塩は溶けてイオンに分解し時間とともにイオンは水全体に散り散りに移動する。このような、初めは局在した物質の濃度が時間と共に空間全体に広がる拡散現象にもエントロピーを考えることができ、その場合も周りの状況が変わらなければエントロピーは一定か増大する一方である。塩の結晶が溶解する場合のように、物質濃度のエントロピーの増大は、しばしば構造の喪失をもたらす。しかし、自然界には、逆に構造を形成する過程もたくさん存在する。

熱のエントロピーと濃度のエントロピーを加えた全エントロピーは常に一定か増大するというのが第2法則の正しい表現である。全エントロピーを増大させながら、例えば濃度のエントロピーを減少させることは可能である。塩水を蒸発させながら塩の結晶をつくることのできるのは、蒸発する水が、塩の結晶を構成して減少させた濃度のエントロピーを上回る熱のエントロピーを外界に熱の移動という形で運び去ったためである。外界まで含めた全エントロピーはやはり増大する。

## 1.2 微視的視点

“熱”や“温度”といった熱力学の量を、分子運動という微視的概念を使って説明することができる。ここで“分子”とは、系を構成する最小単位のこと、場合によっては原子、イオン、原子核を指す。

熱とは、分子の乱雑な運動である。“乱雑”とは、系のどの部分をとっても、分子はあらゆる可能な方向に向かって運動していて、部分系全体の平均運動を差し引いた後の、分子の平均の速度が0である運動状態をいう。静止している流体の分子運動も乱雑だが、一方向に流れる流体の分子全体は乱雑な運動をしているとは普通は言わない。もっと正確には、流れる流体中の分子運動は、流れの方向の一樣運動と分子個々の乱雑運動の重ね合わせとなる。

乱雑な運動にもいろいろな種類がある。それを分子の速度分布で表現する。分布が等方的で、速度が遅く運動エネルギーが小さいものほど多く大きいものほど少ないガウス分布を示すものをMaxwell分布といい、分布の広がりを表すパラメータとして“温度”が定義される。温度が高いほど大きい運動エネルギーの分子が多くなり分布の広がりが大きい。壁内に閉じこめられた孤立系は、分子がエネルギーを失わない弾性衝突を繰り返すことで平衡状態に向かって変化し、分子数が非常に多ければ平衡状態では乱雑運動はMaxwell分布を示す。このことは、Maxwell<sup>4</sup>と Boltzmann<sup>5</sup>によって明らかにされた。非弾性衝突の場合でも、壁から

<sup>4</sup> James Clerk Maxwell : 1831-1879 イギリスの物理学者。エディンバラ生まれ。気体の統計理論、電磁気理論、土星の輪の研究で功績がある。

<sup>5</sup> Ludwig Edward Boltzmann : 1844-1906 オーストリアの物理学者。ウィーン生まれ。原子論に基づく気体の統計理論、とくにエントロピーと統計分布の関係の発見、輻射の研究で業績がある。1906年

エネルギーが適宜供給されれば同じことである。

Maxwell 分布は普遍的なので、孤立系の個性はいずれ失われることを意味する。これが、熱力学第 2 法則の分子運動論の解釈である。

### 1.3 時間の矢

孤立系は、散逸と拡散によって非一様から一様へ、個性から無個性へ一方向に変化し、逆戻りはできない。このことが時間の向き、すなわち時間の矢を決めているといわれる。これは我々の日常経験とも合致するが、他方、一見すると時間反転に関し不変な古典力学の運動法則に反するようにも見える。古典力学では、系が示す運動と時間的に逆向きの運動の双方が可能とされるのである。

Boltzmann が見抜いたように、真相は、我々が巨視的に一様と認識する状態が、実は非常に多くの微視的に異なる状態の寄せ集めであることにある。一様な塩水の中のナトリウムイオンと塩素イオンの位置を入れ替えてもやはり一様な塩水である。“一様性”を保つそのような入れ替えは無数に存在する。巨視的に一様な状態は、無数の異なる微視的状态のどれかを各瞬間に実現している。“一様”に分類される微視的状态の数が“非一様”に分類される微視的状态の数よりも圧倒的に多いので、非一様な状態にいられる時間は、一様状態にある時間に比して極端に短い。熱力学第 2 法則は統計的な法則なのである。

## 2. 拡散と散逸の古典論

散逸と拡散は熱力学第 2 法則に裏打ちされた普遍的現象である。それは微視的な力学の詳細に依存しない。そこで、拡散と散逸の力学も、微視的機構の詳細によらない統計的な性格を持つものになる。ここでは、Brown 運動の力学、ランジュバン方程式、ナヴィエ-ストークス方程式について概括する。

### 2.1 ブラウン運動<sup>6</sup>

Brown<sup>7</sup> は、1827 年、顕微鏡下で水に浮かんだ微粒子が不規則な運動をすることを発見した。まだ原子の存在が認められていない時代のことで、1905 年に Einstein<sup>8</sup> が原子の乱雑運動に

---

に自殺した。

<sup>6</sup> Wiener 過程ともいう。数学では、いわゆる確率過程の一種として扱われる。各時刻での位置は互いに独立で、その差は正規分布に従うようなものである。

<sup>7</sup> Robert Brown : 1773-1858 イギリスの植物学者。スコットランド生まれ。ブラウン運動の発見者。

<sup>8</sup> Albert Einstein : 1879-1955 ドイツ生まれの物理学者。1905 年にブラウン運動、光電効果の解明、特殊相対性理論の構築で物理学に革命をもたらした。1916 年、重力の幾何学下に基づく一般相対性理

よる説明をするまで謎の現象だった (Einstein 1905)。

1次元の粒子運動を考える (例えば, 寺本 1990, Coffey et al. 2004 を参照)。流体中で動く粒子には速度に比例した速度と逆向きの抵抗力  $-\beta v$  とその時々の子知できない乱雑な力  $A(t)$  が作用する。粒子の速度を  $v$  とすると, ニュートンの運動方程式により

$$\dot{v} = -\mu v + A(t) \quad (2.1)$$

が成り立つ。ドットは時間微分を表す。両辺に  $v$  を掛けて集団平均をとると

$$\frac{d}{dt} \overline{\frac{v^2}{2}} = -2\mu \overline{\frac{v^2}{2}}$$

であるから,  $2\mu$  は周囲との摩擦によって運動エネルギーが散逸する時間的割合を表す。

方程式 (2.1) の解は,  $v_0$  を初期値として

$$v(t) = v_0 e^{-\mu t} + e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} A(s) ds$$

である。右辺は短時間に作用するランダムな力を含む積分である。 $A(t)$  を

$$A(t) = \sum_j a_j \delta(t - t_j) \quad (2.2)$$

としよう。 $a_j$  は  $t = t_{j-1}$  から  $t_j$  までのランダムな力の和を表すランダムな変数で平均は 0, すなわち  $\overline{A} = \overline{a_j} = 0$ ,  $\delta(t)$  はディラックのデルタ関数である。これを代入して

$$v(t) - v_0 e^{-\mu t} = \sum_j a_j e^{-\mu(t-t_j)}$$

すなわち,  $v(t)$  はその統計平均  $v_0 e^{-\mu t}$  のまわりにある確率で分布する。 $a_j$  の分散が  $\sigma^2(t_j - t_{j-1})$  で, 揺らぎの大きさ  $\sigma$  はすべてのランダム力に共通としよう。すると, 平均からのずれの 2 乗平均は

$$\begin{aligned} \overline{(v(t) - v_0 e^{-\mu t})^2} &= \sum_j \sigma^2 e^{-2\mu(t-t_j)} (t_j - t_{j-1}) \\ &= \sigma^2 \int_0^t e^{-2\mu(t-s)} ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2\mu} (1 - e^{-2\mu t}) \end{aligned}$$

すべての時間間隔を 0 に近づけて和を積分に置き換えた。このときにランダム力の数は無限になるので中心極限定理を使い, 時刻  $t$  で粒子の速度が  $v$  となる確率を

---

論を発表し, 水星の近日点移動, 太陽近傍での光線の屈折を説明・予言した。終生量子論に異議を唱え, 重力と電磁気の統一理論を探し求めた。

$$P(v, t) = \frac{1}{\sqrt{(\pi\sigma^2/\mu)(1-e^{-2\mu t})}} \exp\left[-(v-v_0e^{-\mu t})^2 / (\sigma^2(1-e^{-2\mu t})/\mu)\right]$$

と求めることができる。この分布は無限の時間の後、普遍分布関数

$$P(v, \infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2/\mu}} \exp(-\mu v^2/\sigma^2)$$

という正規分布になる。これは Maxwell-Boltzmann 分布になるはずだから

$$\frac{2\mu}{\sigma^2} = \frac{m}{k_B T} \tag{2.3}$$

である。ここで、 $m$  は粒子の質量、 $T$  は温度、 $k_B$  はボルツマン定数である。散逸の割合と揺らぎの大きさのこのような関係を揺動散逸定理という。ここでは揺らぎが有限温度に起因するとしたが、別の要因を考えることもできる。例えば、温度 0 K でも存在する量子論的揺らぎである。グリーン関数の方法を使えば、一般的な揺らぎのもとでの揺動散逸定理を導くことができる。

## 2.2 ランジュバン方程式

2.1 節での議論の出発点で用いた、ランダムな物理的要素を含む方程式をランジュバン方程式という。座標  $x$  を使えば

$$\ddot{x} = -\mu\dot{x} + A(t)$$

である。 $v = \dot{x}$  についてはすでに解が得られているので、これを積分して位置を求めることができる。結果は、 $x_0$  を初期値として

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\mu}(1-e^{-\mu t}) + \frac{1}{\mu} \int_0^t (1-e^{-\mu(t-s)}) A(s) ds$$

である。

$t=0$  で  $x_0$  にいた粒子が  $x_0$  から遠ざかる程度は、上の結果を用いて

$$\begin{aligned} (x(t) - x_0)^2 &= \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 (1-e^{-\mu t})^2 + 2 \frac{v_0}{\mu} (1-e^{-\mu t}) \frac{1}{\mu} \int_0^t (1-e^{-\mu(t-s)}) A(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{\mu^2} \int_0^t \int_0^t (1-e^{-\mu(t-s)}) (1-e^{-\mu(t-u)}) A(s) A(u) ds du \end{aligned}$$

の平均で与えられる (Uhlenbeck and Ornstein 1930)。それを  $\Delta x^2$  としよう。すると

$$\Delta x^2 = \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 (1-e^{-\mu t})^2 + \frac{1}{\mu^2} \int_0^t \int_0^t (1-e^{-\mu(t-s)}) (1-e^{-\mu(t-u)}) \overline{A(s)A(u)} ds du \tag{2.4}$$

となる。ここで  $A(t)$  について 2.1 節と同じく白色乱雑性 (2.2), すなわち異なる時刻のデルタ関数的な力については平均は 0, すべての周波数成分の強度は同じ, を仮定する。すると

$$\begin{aligned}\overline{A(t)A(s)} &= \sum_{j,j'} \overline{a_j a_{j'}} \delta(t-t_j) \delta(s-t_{j'}) = \sum_j \sigma^2 \delta(t-t_j) \delta(s-t_j) \Delta t \\ &= \sigma^2 \int_0^\infty \delta(t-\tau) \delta(s-\tau) d\tau \\ &= \sigma^2 \delta(t-s)\end{aligned}$$

を得る。これを (2.4) に代入すると

$$\begin{aligned}\Delta x^2 &= \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 (1-e^{-\mu t})^2 + \frac{\sigma^2}{\mu^2} \int_0^t (1-e^{-\mu(t-s)})^2 ds \\ &= \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 (1-e^{-\mu t})^2 + \frac{\sigma^2}{\mu^2} \left( t - \frac{2}{\mu} (1-e^{-\mu t}) + \frac{1}{2\mu} (1-e^{-2\mu t}) \right) \\ &= \left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 (1-e^{-\mu t})^2 + \frac{2k_B T}{m\mu} \left( t - \frac{3}{2\mu} + \frac{2}{\mu} e^{-\mu t} - \frac{1}{2\mu} e^{-2\mu t} \right)\end{aligned}$$

となる。ここで (2.3) の関係式を使った。従って

$$\Delta x^2 \approx \begin{cases} v_0^2 t^2, & t \approx 0, \\ \frac{2k_B T}{m\mu} t, & t \rightarrow \infty. \end{cases}$$

$t \approx 0$  で  $\Delta x$  は  $v_0 t$  のように変化し,  $t \rightarrow \infty$  では  $t^{1/2}$  のように増大する。後者は酔歩の場合と同じである。

Einstein は, Brown 運動を説明するために粒子の位置分布を表す関数が従う拡散方程式を導き, それを解くことで  $\Delta x$  の関数形を求めた (1905 年)。彼が導いた拡散方程式は

$$\dot{f} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

である。これを解いて

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

を得る。初期条件は  $t=0$  で  $f(x,0) = \delta(x)$  である。出発点からの変移の 2 乗平均は

$$\Delta x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,t) dx = 2Dt$$

これは, Uhlenbeck と Ornstein の結果の  $t \rightarrow \infty$  の場合に対応する。しかし,  $t \rightarrow 0$  では速度の平均を定義できないので正しくはない。また, 拡散係数については



$$D = \frac{k_B T}{6\pi k r}$$

を得ている。 $k$  は粘性係数、 $v$  は粒子の半径である。

### 2.3 ナヴィエ・ストークス方程式

流体の要素間には一般に摩擦力が作用し、運動の差違を無くそうとする状態拡散の傾向が生まれる。拡散方程式の考え方を、確率分布関数ではなく流体の速度分布に適用したものが Navier<sup>9</sup> と Stokes<sup>10</sup> によって提案された。現在 Navier-Stokes 方程式と呼ばれているのがそれである。拡散方程式における拡散係数に相当するものは、ここでは動粘性係数となり、普通ギリシャ文字の  $\nu$  で表される。

拡散項も分子動力学の観点から導くことができる。隣接する流体要素に速度勾配があると、速い要素からは速い分子が流入し、遅い流体要素には分子が流れ出るので、流速を均一化しようとする傾向が流体要素間の作用反作用の結果として生まれる。これが粘性である。分子の衝突がエネルギーを失わない弾性衝突であっても粘性は生じることに注意すべきである。このとき、全体のエネルギーは境界面で失われる。境界面で、流体要素は動かないと考えられているからである。

## 3. 散逸系の正準理論

### 3.1 減衰調和振動子

散逸あるいは拡散する場の運動は拡散方程式で記述される。それは、時間について 1 階、空間について 2 階の微分を含む。最も簡単なのは既に現れた拡散方程式である。ここでは、多くの研究の集積がある減衰調和振動子を取り上げる。これは、質点がフックの法則に従うバネによる弾性力と環境との摩擦で生じる抵抗を受けながら運動するもので、運動方程式は、 $x$  を質点の座標として

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \kappa x \quad (3.1)$$

である。ここで、 $m$  は質量、 $\gamma$  は抵抗係数、 $\kappa$  は弾性係数で、全て正の定数である。バネの復元力が変移に比例する  $-\kappa x$ 、抵抗力が速度に比例する  $-\gamma\dot{x}$  で表されている。(図 2) この項が熱力学第 2 法則を表現する項になっている。

<sup>9</sup> Claude Louis Marie Henri Navier : 1785-1836 フランスの物理学者、数学者。

<sup>10</sup> George Gabriel Stokes : 1819-1903 アイルランドの物理学者、数学者。



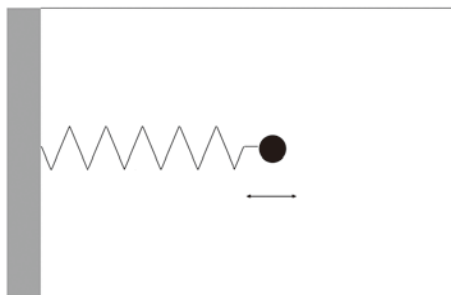


図2 バネの復元力と抵抗を受けて横方向に運動する物体。箱は液体で満たされていて、物体はその中に浮かんでいる。物体に作用する浮力と重力がちょうど打ち消し合っている。

これは2階の微分方程式であるが、次のように1階微分方程式に書き直すこともできる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ m\dot{y} &= -\gamma y - \kappa x \end{aligned} \quad (3.2)$$

通常、1変数の $n$ 階微分方程式を解くには $n$ 個の初期値が必要で、その $n$ が系の力学自由度となるので、(3.1)でも(3.2)でも自由度は同じ2である<sup>11</sup>。

(3.2)の独立な解は2つある：

$$x_i = x_0 e^{-\lambda_i t}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \left( 1 \pm \sqrt{1-w} \right), \quad w = \frac{4m\kappa}{\gamma^2} \quad (3.3)$$

解は次のように分類される。

$$w < 1 : \text{過減衰 overdamping} \quad 1-w > 0$$

$$w = 1 : \text{臨界減衰 critical damping} \quad 1-w = 0$$

$$w > 1 : \text{過少減衰 underdamping} \quad 1-w < 0$$

臨界減衰の場合は、独立解は(3.3)とは異なり

$$e^{-\gamma t/(2m)}, \quad t e^{-\gamma t/(2m)}$$

の2つとなる。過減衰は $x$ が時間と共に単調に0に向かい、過少減衰は $\sqrt{1-w}$ が虚数なので0の周りに振動しながら0に向かう。なお、過少減衰の時

$$\Omega \equiv \frac{\gamma}{2m} \sqrt{w-1} = \frac{1}{2m} \sqrt{4m\kappa - \gamma^2}$$

を換算角振動数 reduced angular frequency という。

(3.1)の両辺に $\dot{x}$ を掛けて変形すると

<sup>11</sup> 力学系を連立1階微分方程式で表す方法は一般性があり、汎用性もある。最近では、物質と電磁場の“非常に強い相互作用”を通した相転移が、線形連立1階微分方程式で扱われている (Ciuti et al. 2005; Casanova et al. 2010)。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{\kappa}{2} x^2 \right) = -\gamma \dot{x}^2$$

左辺の括弧のなかは全 (力学) エネルギー, 右辺は負なので, この式は系の全エネルギーが時間と共に減少することを表す。すなわち, エネルギーは散逸する。言い換えれば, 減衰調和振動子は保存系でない。したがって, 運動エネルギーから位置エネルギーを差し引いたものをラグランジュアンとする正準形式をつくることができない。これは, 古典系の正準量子化<sup>12</sup>ができません, このままでは量子系に移行できないことを意味する。自己矛盾のない量子論は構築できないのだろうか。

### 3.2 Bateman 系

変分原理によって運動方程式を与える“ラグランジュアン”, あるいは Hamilton 形式で運動方程式を与える“ハミルトニアン”をつくることができれば, 量子論への入り口の問題は解決する。この試みを最初に行ったものに Bateman (1931) の仕事がある。ここでは, 後の量子論への移行と直接関わる Bateman 系の説明をする。

もう一つの変数  $y$  ((3.2) の  $y$  とは別のもの) を導入し, 次の“ラグランジュアン” (以後, 引用符は省略する) をつくる:

$$L = m\dot{y}\dot{x} - \frac{\gamma}{2}(\dot{y}x - y\dot{x}) - \kappa yx \quad (3.4a)$$

または

$$L = -y(m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \kappa x) \quad (3.4b)$$

ハミルトニアン<sup>13</sup>を

$$H = m\dot{y}\dot{x} + \kappa yx \quad (3.5)$$

Action (作用) を

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

で定義し, これに変分原理—従属変数の微小変分で  $S$  が変わらない—を適用すると  $y$  の変

<sup>12</sup> 量子化とは, 古典的な場を粒子 (量子ともいう) あるいはその集合と同等とみなす理論形式を構成することをいう。正準量子化 (法) とは, 古典力学を解析力学の手法で一般化したときに導入される Poisson 括弧式を交換関係で置き換え, 古典力学での物理量を演算子と見なす手続きによって理論形式を構成することを指す。これにより古典論をもとに量子論を構築すると, 量子系での運動方程式が古典系のそれとうまく対応し, 量子数が大きいときに古典系の運動方程式に一致する—Bohr の対応原理と矛盾しない—ことが保証される。

<sup>13</sup> 標準的なハミルトニアンは運動エネルギーと位置エネルギーを含んでいる。この場合はハミルトニアンをエネルギーと解釈できる。しかし, (3.5) はそのような項を含んでいない。よって, Bateman 系のハミルトニアンはエネルギーではない。

分から (3.1) が直ちに得られる。ところが,  $x$  の変分からは  $y$  の方程式

$$m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + \kappa y = 0 \quad (3.6)$$

が導かれる。これは, (3.1) で  $\gamma$  を  $-\gamma$  としたものだから, 解は時間と共に指数関数的に増大する, あるいは振動解の場合は振幅が指数関数的に増大する。散逸系にこのような力学変数は本来存在しない, すなわち非物理的である。これが Bateman 系の際だった特徴で, 系が時間反転

$$t \rightarrow -t: x(t) \leftrightarrow y(t)$$

のもとで不変であることに由来する。このことから「 $y$  は  $x$  の時間反転に関する鏡像である」という言うことができる。

ここで

$$y = 0$$

は (3.6) の解であることに注意してみる。すなわち,  $y$  は非物理的変数であって, 現実の世界では常に 0 であるべしという条件を課せば, この系は物理的に意味のあるものになりうる。事実, Takahashi (2017) は, このような方針で Navier-Stokes 方程式と乱流の方程式を導き, 後者が観測される事実とよく整合する結果を与えることを示した。Bateman 系はさらに深く検討する価値があると思われる。

### 3.3 Kanai ハミルトニアン

Kanai (1948) は次のようなハミルトニアンを考えた (Caldirola 1941 ; Kanai 1948) :

$$H_K = \frac{1}{2m} e^{-\gamma t/m} \Pi^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 e^{\gamma t/m} x^2 \quad (3.7)$$

$\Pi$  は  $x$  に共役な運動量である。Hamilton の運動方程式は Poisson 括弧式を用い

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H_K\} = \frac{e^{-\gamma t/m}}{m} \Pi \\ \dot{\Pi} &= \{\Pi, H_K\} = -m\omega^2 e^{\gamma t/m} x \end{aligned}$$

となる。これより

$$\dot{\Pi} = \frac{d}{dt} (m e^{\gamma t/m} \dot{x}) = -m\omega^2 e^{\gamma t/m} x$$

となり, これを書き換えて

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + m\omega^2 x = 0$$

という, 正しい方程式を導くことができる。

ハミルトニアンは, 運動方程式の解を代入すれば時間に依存しないが, 明示的に時間に依

存するパラメータを含む。この意味は何だろうか。(3.7) を見れば分かるように、 $\omega^2 = \kappa/m$  を一定にしつつ質量が時間に関し指数関数的に増加する系である。) このハミルトニアンは実質的に時間に依存しないので、これで散逸系のエネルギーを表すことはできないはずだが、ではその正体は何だろうか。

実は、Kanai 系は Bateman 系と正準変換で結びついていることが知られている (Dekker 1981)。Bateman 系に正準変換を行うとハミルトニアンは 2 つの部分系に分かれ、その 1 つが Kanai ハミルトニアンで、もう 1 つが Bateman 系の  $y$  に関するハミルトニアンとなるのだが、これは Kanai 系では捨て去られていたのである。Bateman 系と (捨てられた部分系を取り入れた) Kanai 系は同等なのである。したがって、この 2 つの系は内在する問題を共有する (第 4 節参照)。

### 3.4 Dedene 系

減衰調和振動子は時間的に指数関数的に変動する。そのような時間依存性は 1 階の微分方程式を満たす。(3.3) の記法を用いると

$$\dot{x}_i = -\lambda_i x_i \quad (3.8)$$

である。Bateman 系では、これに対応する自由度  $y_i$  があって

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i \quad (3.9)$$

に従う。これらの方程式は次のラグランジュアン (密度) から変分原理で導かれる:

$$L = \sum_i (y_i \dot{x}_i + \lambda_i y_i x_i) \quad (3.10)$$

ハミルトニアンは

$$H = -\sum_i \lambda_i y_i x_i \quad (3.11)$$

となる。 $x_i$  の運動量の役割を  $y_i$  が果たしている。これは、Bateman 系で質量を 0、 $\kappa/\gamma$  を一般に複素数とした場合に他ならない。有限質量 Bateman 系で、もとの変数から単一モードを取り出すことができることは Dekker (1977) が指摘していた。

ここで変数を複素数に拡張して、過少減衰系に対し

$$H_D = -\lambda_2 \bar{z} z \quad (3.12)$$

を古典ハミルトニアンとするのが Dedene (1980) の提案である。 $(\lambda_2$  の代わりに  $\lambda_1$  でもよい。Dedene (1980) では量子化のために複素 Poisson 括弧式を用いているので、(3.12) の右辺に因子  $-i$  が掛かっている。)  $\bar{z}$  が  $z$  の共役運動量である。古典力学の運動方程式は

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \{z, H_D\} = -\lambda_2 z \\ \dot{\tilde{z}} &= \{\tilde{z}, H_D\} = \lambda_2 \tilde{z}\end{aligned}\tag{3.13}$$

となり、 $z$  が減衰モード、 $\tilde{z}$  が増強モードを表している。もとの力学変数と共役運動量は

$$x = -\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\Omega}{2}} (z - \tilde{z}), \quad \Pi = -\frac{i}{\sqrt{2\Omega}} (\lambda_1 z + \lambda_2 \tilde{z})\tag{3.14}$$

であることを仮定する。

Dedene 系は、Bateman 系の Newton 運動方程式の解の一つに注目して構成されている。このことの利点は量子論への移行の時に明らかになる。

もう一つの解を取り入れるために、古典ハミルトニアンを

$$H = -\lambda_1 z^\dagger \tilde{z}^\dagger - \lambda_2 \tilde{z} z$$

とすることが Dekker (1981) によって提案された。 $Z^\dagger$  は  $Z$  の正準共役量である。しかし、右辺第 1 項と第 2 項は、(3.14) により互いに独立にできない。この点も後に再考される。

### 3.5 コヒーレント状態とマスター方程式

散逸方程式はもともと古典系において成り立つものであった。古典系の特徴は、位置と運動量が両方ともに一般に非 0 で確定することである。他方、ハミルトニアンの固有状態は、これらの期待値として常に 0 を与えるのであって、散逸状態を記述するには不適格であるのかも知れない。そこで、位置や運動量の期待値として 0 でない有限値を与える状態だけで物理空間を構成すれば、全く異なる結果が得られるかも知れない。そのためにはコヒーレント状態—Glauber 状態ともいう—を用いればよい。

Dekker (1977, 1981) はコヒーレント状態の確率密度を調和振動子状態の行列要素で表し、それらの発展方程式—すなわちマスター方程式—を求め、それをもとに演算子の期待値の時間変化を得ることができた。その結果については次節で触れる。

\*\*\*\*\* マスター方程式 \*\*\*\*\*

マスター方程式の考え方は“Ehrenfests の蚤” (例えば Keizer 1987) によって最も手っ取り早く理解できる。全部で  $n$  匹の蚤がいて、2 匹の犬 A と B の間を無秩序に飛び移っているとするとする (図 3)。ある時刻におけるそれぞれの蚤の数を  $n_A$ ,  $n_B$  とする。時刻  $t$  に犬 A に  $n_A$  匹の蚤がいる確率  $W(n_A, t)$  が時間と共にどのように変化するかを知りたい。短い時間間隔の間に飛び移る蚤は常に 1 匹だけとする。

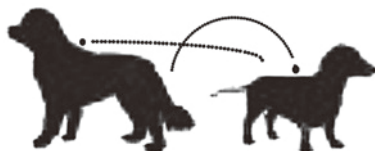


図 3 犬と蚤

$W(n_A, t)$  は、短い時間間隔  $dt$  の間に蚤が B から A に飛び移ることで増加し、A から B に飛び移ることで減少する。そこで

$$W(n_A, t + dt) = W(n_A, t) + \text{Prob}(n_A - 1 \rightarrow n_A, t, dt) + \text{Prob}(n_A + 1 \rightarrow n_A, t, dt) - \text{Prob}(n_A \rightarrow n_A - 1, t, dt) - \text{Prob}(n_A \rightarrow n_A + 1, t, dt)$$

と表すことができるだろう。ここで、 $\text{Prob}(n_A - 1 \rightarrow n_A, t, dt)$  は時間間隔  $dt$  の間に A の蚤が  $n_A - 1$  匹から  $n_A$  に変化する確率を表す。他も同様である。蚤 1 匹が単位時間に飛び移る確率を  $p_{A \rightarrow B}$  または  $p_{B \rightarrow A}$  とする。右辺第 2 項については、B から A への飛び移りの前の B 上の蚤の数が  $n - n_A + 1$  であることを考慮すると  $(n - n_A + 1)p_{B \rightarrow A}W(n_A - 1, t)dt$  である。同様に、残りの 3 項の確率はそれぞれ順に

$$(n_A + 1)p_{A \rightarrow B}W(n_A + 1, t)dt, \quad n_A p_{A \rightarrow B}W(n_A, t)dt, \quad n_B p_{B \rightarrow A}W(n_A, t)dt$$

である。これらを全て集めて

$$dW(n_A, t) / dt = (n - n_A + 1)p_{B \rightarrow A}W(n_A - 1, t) + (n_A + 1)p_{A \rightarrow B}W(n_A + 1, t) - (n_A p_{A \rightarrow B} + (n - n_A)p_{B \rightarrow A})W(n_A, t)$$

これが今の問題に関するマスター方程式である。

\*\*\*\*\*

#### 4. 散逸拡散系の量子化にともなう深刻な問題

熱力学第 2 法則に従ったエネルギーの散逸と物質の拡散は、ともに拡散方程式によって記述される。基本は普遍的な統計法則にあるのだから、微視的過程についても拡散方程式は解明の役割を果たすだろう。次に拡散方程式の量子化を考えるのは、ごく自然な流れである。これまでに見たモデルには、ラグランジュアン・ハミルトニアンが存在するので、正準量子化法が原則として適用できるはずである。しかし、‘真空の不安定’と‘不確定性原理の破れ’が起き、話は単純ではない。この問題を、Bateman 系で説明する。

#### 4.1 真空の不安定

Bateman 系の変数  $x$  と  $y$  を共に粒子の空間位置を表す変数であるとして正準量子化を試みたのは Feshbach・Tikochinsky (1977) と Celeghini et al. (1992) である<sup>14</sup>。ここでは、彼らの方法と結果を彼らが扱った過少減衰の場合に則して復習する。

共役運動量を

$$\begin{aligned}\Pi_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{y} - \frac{\gamma}{2}y \\ \Pi_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{x} + \frac{\gamma}{2}x\end{aligned}\tag{4.1}$$

で定義し、ハミルトニアンを

$$H(x, y, \Pi_x, \Pi_y) = \Pi_x \dot{x} + \Pi_y \dot{y} - L = m\dot{y}\dot{x} + \kappa yx\tag{4.2}$$

とする。ここで、 $\dot{x}$  と  $\dot{y}$  は (4.1) で決まる、共役運動量と位置変数の関数である。

Heisenberg の量子交換関係を規則に従って次のように設定する：

$$\begin{aligned}[x, \Pi_x] &= [y, \Pi_y] = i\hbar \\ [x, y] &= [x, \Pi_y] = [y, \Pi_x] = [\Pi_x, \Pi_y] = 0\end{aligned}\tag{4.3}$$

ここで  $[X, Y] \equiv XY - YX$ 、 $\hbar$  は Planck 定数を  $2\pi$  で割ったものである。次に、新しい演算子を

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}} \left( \frac{\Pi_x}{\sqrt{m}} - i\sqrt{m}\Omega x \right), & b &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}} \left( \frac{\Pi_y}{\sqrt{m}} - i\sqrt{m}\Omega y \right) \\ a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}} \left( \frac{\Pi_x}{\sqrt{m}} + i\sqrt{m}\Omega x \right), & b^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}} \left( \frac{\Pi_y}{\sqrt{m}} + i\sqrt{m}\Omega y \right)\end{aligned}\tag{4.4}$$

で導入する。これらは

$$\begin{aligned}[a, a^\dagger] &= [b, b^\dagger] = 1 \\ [a, b] &= [a, b^\dagger] = 0\end{aligned}\tag{4.5}$$

を満たす。これによりハミルトニアンは

$$H = \hbar\Omega(A^\dagger A - B^\dagger B) + i\frac{\hbar\gamma}{2m}(A^\dagger B^\dagger - AB)\tag{4.6a}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b), \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)\tag{4.6b}$$

<sup>14</sup>  $y$  は時間に関し指数関数的に増大するので観測対象の粒子の座標であるはずはない。Feshbach & Tikochinsky (1977) と Celeghini et al. (1992) は環境熱浴を表すと考えたが、これは誤りである。



このあと Feshbach & Tikochinsky (1977) と Celeghini et al. (1992) は,  $SU(1,1)$  群の表現論<sup>15</sup>に従って完全直交系をつくり  $H$  の固有値をすべて求め, それに下限がないことを示す。それは数学的に煩雑な手続きなので, ここではその証明をもっと簡単に行う。

次のように定義された状態  $|0\rangle$  - 真空 -

$$a|0\rangle = b|0\rangle = A|0\rangle = B|0\rangle = 0$$

を基に, 規格化された  $B$  粒子が  $n$  個存在する状態

$$|n\rangle = B^{\dagger n}|0\rangle / \sqrt{n!}$$

をつくる。 $H$  の期待値は

$$\langle H \rangle = -\hbar\Omega n < 0$$

であり,  $\langle H \rangle$  は負で  $n$  を大きくとればいくらかでも絶対値が大きくなる。

$A$  粒子と  $B$  粒子が共存する状態

$$|l, n\rangle = A^{\dagger l} B^{\dagger n}|0\rangle / \sqrt{l!n!}$$

について  $H$  の行列要素を考える:

$$\langle l, n|H|l, n\rangle = \hbar\Omega(l-n)$$

$$\langle l, n|H|l-1, n-1\rangle = i \frac{\hbar\gamma}{2m} \sqrt{ln}$$

$$\langle l-1, n-1|H|l, n\rangle = -i \frac{\hbar\gamma}{2m} \sqrt{ln}$$

$$\langle l-1, n-1|H|l-1, n-1\rangle = \hbar\Omega(l-n)$$

行列で書くと

$$\begin{pmatrix} \hbar\Omega(l-n) & -i \frac{\hbar\gamma}{2m} \sqrt{ln} \\ i \frac{\hbar\gamma}{2m} \sqrt{ln} & \hbar\Omega(l-n) \end{pmatrix}$$

これを対角化すると, 対角要素 - 固有値 - は

$$\hbar\Omega(l-n) \pm \frac{\hbar\gamma}{2m} \sqrt{ln}$$

<sup>15</sup>  $SU(1,1)$  は複素数  $Z_1$  と  $Z_2$  からつくられる  $|z_1|^2 - |z_2|^2$  を不変にする非コンパクト, 非可換群である。例えば Perelomov (1986) を参照されたい。

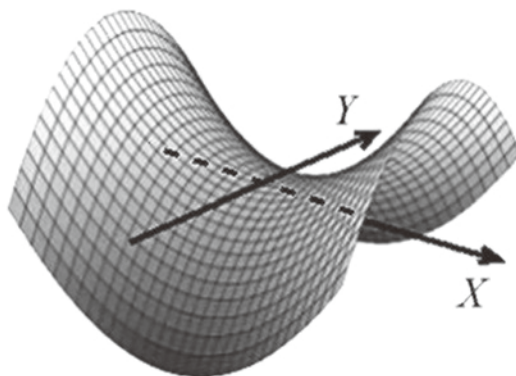


図4 ハミルトニアン (3.5) は双曲面をつくる。鞍点  $X=Y=0$  は不安定である。

で、散逸項がさらにエネルギーの低い状態を生み出すことが分かる。

原因は明らかである。ハミルトニアン (3.5) が双一次形式になっていて (4.6b) による 2 次形式が双曲型、すなわち平衡点が鞍点になっているためにエネルギーに最低値がなかったのである。ハミルトニアンを  $X=(x+y)/\sqrt{2}$  ,  $Y=(x-y)/\sqrt{2}$  の関数として描くと図 4 のような双曲面になる (すなわち  $SU(1,1)$  対称性を持つ)。 $|Y|$  が増加するとハミルトニアンは負の無限大に発散するのである。

#### 4.2 不確定性原理の破れ

粒子の座標  $x$  と運動量  $p = m\dot{x}$  の間に Heisenberg の不確定性関係が成立しないことはすぐに分かる。ともに時間依存性が  $e^{-\lambda t}$  で与えられ、これらの任意の積の真空期待値は指数関数的に 0 に近づく。従って  $t \rightarrow \infty$  に対し  $\langle x^2 \rangle^{1/2} \langle p^2 \rangle^{1/2} \rightarrow 0$  なのである。我々の世界ではこの積に 0 でない下限が存在し、Heisenberg の不確定性原理によればそれは  $\hbar \sim 10^{-27} \text{ erg}\cdot\text{s}$  程度の大きさでなければならない。Bateman 系が不確定性原理と抵触する可能性の詳しい議論については、Hasse (1975), Dekker (1981), Um et al. (2002) を参照されたい。

Dekker (1977, 1981) は、ハミルトニアンの固有状態ではなくコヒーレント状態についての不確定性を詳しく議論している。コヒーレント状態は、さまざまなハミルトニアン固有状態の重ね合わせで、消滅演算子の固有状態になるように構成されているために、運動方程式の期待値が古典的運動方程式に一致し、Bohr の対応原理<sup>16</sup> を常に満たすという特徴がある。

<sup>16</sup> 量子数が大きい量子状態は古典の状態と同じになるべき、という要請。厳密な議論は Ehrenfest による。Schrödinger 方程式に従う粒子の位置と運動量の期待値  $\langle x \rangle$  と  $\langle p \rangle$  について古典力学の関係  $\langle \dot{p} \rangle = m d\langle x \rangle / dt$  ,  $d\langle p \rangle / dt = \langle F \rangle$  が成り立つ。(  $\langle F \rangle = -d\langle V \rangle / dx$  は作用する力の期待値である。) これを Ehrenfest の定理という。

Dekker は、コヒーレント状態を基底にとった密度行列の発展方程式を解いて、位置と運動量の 2 次モーメントを求めた。そして、不確定性に下限があって、初期条件によらず  $\hbar/2$  を下回らないことを示した。しかし、臨界減衰に近づくに従ってこの下限は発散する。これは逆の意味で困った状況である。また、不確定性関係の時間依存性を無くすことはできないという問題もある。

位置と運動量について Heisenberg の不確定性関係が成立しないということは、そもそも Bateman 系が物理的に意味を持たないか、あるいは量子化の方法がまずいか、または観測される物理量の構成に誤りがあるか、のいずれかであろう。Bateman 系は、一つの自由度については古典的には正しい記述を与える<sup>17</sup>。Bateman 系で記述される観測可能な古典系が存在するのだから、それに対応する量子系をどのように構築するかを探求することには物理的な意味があるはずである。次節以降でこの問題を詳しく調べることにする。

## 5. 0 質量 Bateman 系

### 5.1 古典系

研究の見通しを得るために、最も単純な 0 質量 Bateman 系 (Takahashi 2018a) を考える。それは次のラグランジュアンで与えられる：

$$L_D = -y(\gamma \dot{x} + \kappa x) \quad (5.1)$$

ラグランジュアン (5.1) は、(3.4) で  $m=0$  とおいたもので、運動方程式は

$$\dot{x} = -\lambda x \quad (5.2a)$$

$$\dot{y} = \lambda y \quad (5.2b)$$

である。ここで  $\lambda \equiv \kappa/\gamma$  である。

(5.2a) は散逸方程式である。図 5 にあるように、室温  $T_0$  の部屋の中で、茶碗の中の湯の温度  $T$  が変化する様子は、 $x = T - T_0$  としたとき (5.2a) で記述される (Newton の冷却則)。物質の濃度の変化も基本的には (5.2a) に従うとされる。非平衡状態の時間変化の割合は、着目している量と周囲との差に比例するという考え方に基づいている。

<sup>17</sup> Bateman 系の考え方を、対称性を壊さないように非線形に拡張して流体现象に適用することもできる。この場合は、必然的に新しい相互作用が導入されるが、このことで乱流がうまく記述されることが分かっている (Takahashi 2017)。古典力学では、Bateman 系は有望なのである。

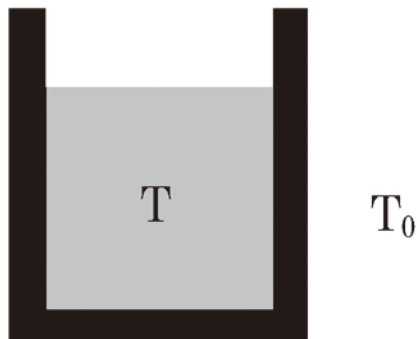


図5 湯の温度  $T$  は Newton の冷却則 (5.2a) に従って時間と共に変化する。このときの  $y$  とは何だろうか。

(5.2b) は、指数関数的に増加する  $y$  を解に持つ凝集方程式であるが、どのような対象を記述しているのかは古典論の段階では不明である。むしろ、そのようなものは古典世界には存在しないとするほうがすっきりする。

この方程式系は、時間反転  $t \rightarrow -t, x \leftrightarrow y$  のもとで不変である。また、Bateman 系の特徴として、 $L_D$  は我々が関心のある散逸方程式 (5.2a) を導くために構成されたのであり、全体に任意の定数が掛けられていても古典力学の内容は変わらない。すなわち、 $\alpha$  と  $\beta$  を 0 でない任意の複素定数として、変換

$$x \rightarrow \alpha x, y \rightarrow \beta y \quad (5.3)$$

に対し、力学は不変である。

変数  $x$  の共役運動量は

$$\frac{\partial L_D}{\partial \dot{x}} = -\gamma y \quad (5.4)$$

であるが、 $y$  に共役な運動量は存在しない。

ここで新しい変数  $z$  と  $\bar{z}$  を次のように導入し

$$z = (x + iy)/\sqrt{2}, \quad \bar{z} = (x - iy)/\sqrt{2} \quad (5.5)$$

$L_D$  を次のように書き換える：

$$L_D = -i \left( \gamma \bar{z} \dot{z} + \frac{\kappa}{2} (\bar{z}^2 - z^2) \right) \quad (5.6)$$

運動方程式は次のようになる

$$\gamma \dot{z} + \kappa \bar{z} = 0, \quad \gamma \dot{\bar{z}} + \kappa z = 0 \quad (5.7)$$

外部環境  $J(t)$  と相互作用しているときの解は

$$x(t) = (J/\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t') G(t-t') dt' = (J/\kappa)(1 - e^{-\lambda t}) \quad (5.8)$$

$\theta(t)$  は階段関数,  $\lambda \equiv \kappa/\gamma$ ,  $G(t)$  は Green 関数である:

$$G(t) = \theta(t)e^{-\lambda t}, \quad \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)G(t) = \delta(t) \quad (5.9)$$

$z$  に共役な運動量

$$p = \frac{dL_D}{dz} = -i\gamma\bar{z} \quad (5.10)$$

を用いて, ハミルトニアンは

$$H_D = zp - L_D = -\frac{i\kappa}{2} \left( \frac{1}{\gamma^2} p^2 + z^2 \right) \quad (5.11)$$

となる。運動方程式 (5.7) から,  $iH_D$  は時間的に一定である。

## 5.2 量子化と物理状態

これまでの古典論をもとに量子化を行うには, (5.10) から次の交換関係を設定すればよい:

$$[z, p] = i\hbar \quad (5.12a)$$

別の書き方をすると

$$[z, \bar{z}] = -\frac{\hbar}{\gamma} = -i[x, y] \quad (5.12b)$$

初めに独立な自由度と仮定した  $x$  と  $y$  が, 実は互いに正準共役でなければならなかったということを (5.4) と (5.12b) は表している。これまで見過ごされてきた 0 質量系のこの性質は, 後に非 0 質量 Bateman 系でも重要な役割を演じることがわかる。

$z, p$  を含めたすべての演算子  $O$  は Heisenberg 運動方程式に従う

$$\hbar\dot{O} = -i[O, H_D] \quad (5.13)$$

$z$  と  $\bar{z}$  に関しては, これは古典的運動方程式 (5.9) と形の上で一致する。

$H_D$  は次のように書くこともできる:

$$H_D = -i\hbar\lambda \left( \tilde{a}a + \frac{1}{2} \right) \equiv \hat{H}_D - \frac{i\hbar\lambda}{2} \quad (5.14a)$$

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{\gamma} z + \frac{ip}{\sqrt{\gamma}} \right) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\hbar}} x, \quad \tilde{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{\gamma} z - \frac{ip}{\sqrt{\gamma}} \right) = i\sqrt{\frac{2\gamma}{\hbar}} y \quad (5.14b)$$

$$[a, \tilde{a}] = 1 \quad (5.14c)$$

$$z = \sqrt{\frac{\hbar}{2\gamma}} (a + \tilde{a}), \quad p = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar\gamma}{2}} (a - \tilde{a}) \quad (5.14d)$$

$x$  と  $y$  は一般にはエルミット演算子ではないことに注意せよ。さらに、昇降演算子  $a$  と  $\tilde{a}$  は互いにエルミット共役ではないので、一般に  $\hat{H}_D$  はエルミットではない。 $\hat{H}_D$  の固有状態

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \tilde{a}(0)^n |0\rangle, \quad \langle n| = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0| a(0)^n, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{n,m} \quad (5.15a)$$

$$a(0)|0\rangle = \langle 0|\tilde{a}(0) = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1 \quad (5.15b)$$

は  $n$  粒子状態である。これらを基底とする Hilbert 空間に話を限ると、 $a$  と  $\tilde{a}$  は互いにエルミット共役で、 $\lambda$  が純虚数のときは  $H_D$  はエルミット演算子、実数のときは反エルミット演算子となる。今考えている純拡散の場合、 $\lambda$  は実数である。真空は時間に依存しない：

$$|t\rangle = e^{-i\hat{H}_D t/\hbar} |0\rangle = |0\rangle, \quad \langle t| = \langle 0| e^{i\hat{H}_D t/\hbar} = \langle 0|$$

これにより、0 質量 Bateman 系については '真空の不安定' という量子化の第 1 の問題は存在しないことがわかった。

### 5.3 波動関数

物理状態の Hilbert 空間を Fock 空間として構成できることがわかった。次に、波動関数を座標表示で構成することを考える。まず、 $y$  を対角化する  $y$ -表示ではどうなるだろうか。そのときの真空状態を  $\psi_0(y)$ 、 $\tilde{\psi}_0(y)$  としよう。昇降演算子は

$$a(0) = -\left(i\sqrt{\hbar/2\gamma}\right) d/dy, \quad \tilde{a}(0) = i\sqrt{2\gamma/\hbar} y$$

で、 $y$  は  $c$ -数であるので、(5.15b) は  $y$  か  $\tilde{\psi}_0$  が 0 であることを意味するがこれは物理的に無意味である。 $x$ -表示も同様である。

次に、 $z$  が  $c$ -数、かつ  $p = -i\hbar d/dz$  という  $z$ -表示で考える。ハミルトニアンは

$$H_D = \frac{i\kappa}{2} \left( \frac{\hbar^2}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2 \right) \quad (5.16)$$

で、Schrödinger 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_D \psi \quad (5.17)$$

である。ここで次のような量を考える：

$$\begin{aligned} \rho(z,t) &= \tilde{\psi}(z,t)\psi(z,t) \\ j(z,t) &= \frac{\hbar^2 \kappa}{2\gamma^2} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}(z,t)}{\partial z} \psi(z,t) - \tilde{\psi}(z,t) \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

$\tilde{\psi}(z,t)$  は  $\psi(z,t)$  の時間反転共役で、量子数  $n$  の実固有関数については

$$\tilde{\psi}_n(z,t) = \psi_n(z,-t) \quad (5.19)$$

によって与えられる。一般の波動関数  $\psi_n(z) = \sum_n c_n \psi_n(z)$  の時間反転共役は、Hilbert 空間のベクトル  $\mathbf{c} = \{c_n\}$  の複素共役を用い

$$\tilde{\psi}(z,t) \equiv \sum_n c_n^* \tilde{\psi}_n(z,t) = \sum_n c_n^* \psi_n(z,-t) \quad (5.20)$$

によって表される<sup>18</sup>。さて、(5.18) で定義された  $\rho$  と  $j$  について流れの保存

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0$$

が成り立つことは (5.16) を用いて容易に確かめることができる。また、これより波動関数が遠方で十分速く 0 に近づくときは  $\rho$  の  $z$  積分は時間によらない。そこで規格化を

$$\int_C \tilde{\psi}(z,t)\psi(z,t) dz = 1$$

によって行う (Feshbach and Tikochinsky 1977) ことにすれば、 $(\rho, j)$  を確率の流れ、 $\rho$  を確率密度と解釈することが許される。

(5.14b) と (5.15b) から直ちに真空の波動関数

$$\psi_0(z) = A^{-1/2} \exp(-\gamma z^2 / 2\hbar) = \tilde{\psi}_0(z) \quad (5.21)$$

を得る。これは調和振動子と同型である。規格化定数は

$$A = \int_C \exp(-\gamma z^2 / \hbar) dz \quad (5.22)$$

である。ここで、積分路  $C$  は積分が収束するものであればなんでもよい。ただし、一度決めたら、変更はできない。今の場合、 $C$  として実軸をとるのが一番分かりやすい。 $n$  粒子状態波動関数  $\psi_n$  は、(5.14b) の  $\tilde{a}(0)$  を  $\psi_0(z)$  に作用させて求めることができる：

<sup>18</sup>  $\psi_n(z)$  は  $z$  が実数の時に実関数としている。すぐ下で分かるように、過減衰の場合はこれでよい。過少減衰の場合は、規格化定数は一般に複素数になりうるのでその時は規格化定数の複素共役をとる。



$$\psi_n(z, t) \sim e^{-i\omega_n t} H_n(\sqrt{\gamma/\hbar} z) \psi_0(z)$$

ここで  $H_n$  はエルミット多項式,  $\omega_n = -i\hbar\lambda n$  はハミルトニアン固有値である。

#### 5.4 不確定性

規格化可能な波動関数が存在することがわかったので, 量子揺らぎを求めることができる。

(5.14d) を用い, 調和振動子と全く同じ計算を行って

$$\Delta z^2 \equiv \langle n | z(t)^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2\gamma} \langle n | (a(t) + \tilde{a}(t))^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{\gamma} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (5.23a)$$

$$\Delta p^2 \equiv \langle n | p(t)^2 | n \rangle = -\frac{\hbar\gamma}{2} \langle n | (a(t) - \tilde{a}(t))^2 | n \rangle = \hbar\gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (5.23b)$$

となるので直ちに

$$\Delta z \cdot \Delta p = \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (5.24)$$

が得られる。これは Heisenberg の不確定性関係にほかならない。(5.23a) は量子論的揺動散逸定理である。こうして, 0 質量 Bateman 系には, 不確定性原理への抵触という量子化の第 2 の問題も存在しないことがわかった。

しかし, 古典論では観測量だった座標  $x = \sqrt{\hbar/2\gamma} a$  と共役運動量  $p_x = -\gamma y = i\sqrt{\hbar\gamma/2} \tilde{a}$  に関しては  $\langle n | a^r | n \rangle = \langle n | \tilde{a}^r | n \rangle = 0$  が任意の正数  $r \geq 1$  に対し成り立つので不確定性は存在しない。正しい量子化は座標と運動量として  $x$  と  $y$  の適当な線形結合を用いた場合に達成されるのである。

### 6. 0 質量 Bateman 系のフェルミ量子化

我々は, これまで  $x$  と  $y$ , あるいはそれらの線形結合である  $z$  と  $\bar{z}$  を Bose 統計に従う Bose 変数とみなしてきた。空間座標に対しては, これはごく自然なことである。しかし, もとのラグランジュアンが双一次形式なので, Dirac の電子論<sup>19,20</sup> を参照すると Fermi 統計に

<sup>19</sup> 電子の消滅とその反粒子である陽電子の生成を記述する電子場が, Pauli の排他律-2つ以上の粒子が同一状態をとることはできない-に従う変数として導入される。電子場の運動方程式は線形で, Lorentz 変換のもとで不変である。電子場に荷電共役変換を施すと陽電子場になる。ラグランジュアンは, 電子場と陽電子場の双 1 次形式で表される。我々の散逸系での  $x$  が電子場に,  $y$  が陽電子場に対応する。

<sup>20</sup> Paul Adrian Maurice Dirac: 1902-1984 イギリスの物理学者。Bristol 生まれ。Heisenberg の行列力学の定式化, 電子の波動方程式の発見, 磁気単極子による電荷量子化機構の発見など, 量子力学創成期から完成期にかけての業績が目覚ましい。素粒子と宇宙を関係づける“巨大数”も Dirac が提案した。

従う Fermi 変数とすることも可能のはずである。このとき、量子化をする前の段階では  $x$  と  $y$  は Grassmann 代数  $xy = -yx$ ,  $x^2 = y^2 = 0$  に従うとされる。ここでは、この可能性について述べる。この量子化の物理的な意味は問わないことにする。

運動方程式はこれまでと同じである。 $x$  の共役運動量

$$p = \frac{dL_D}{d\dot{x}} = -\gamma y \quad (6.1)$$

(微分は右から行うものとする。) ハミルトニアンは

$$H_D = \frac{dL_D}{d\dot{x}} \dot{x} - L_D = -\lambda px \quad (6.2)$$

となる。これは当然保存される。 $x$  と  $p$  をあたかも  $c$ -数のようにみなすと、 $H_D$  が一定の軌道は  $x$  軸  $p$  軸と交わらない双曲線であることが、これまでと違うところである。

量子化は次の同時反交換関係を課すことで行う：

$$\{x, p\} = \varepsilon \hbar, \quad x^2 = p^2 = 0 \quad (6.3)$$

$\varepsilon$  は以下のようにして決める。 $\hat{H}_D$  を演算子ハミルトニアンとして、Heisenberg 運動方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -i\hbar^{-1} [x, \hat{H}_D] = i\varepsilon \lambda x \\ \dot{y} &= -i\hbar^{-1} [y, \hat{H}_D] = -i\varepsilon \lambda y \end{aligned} \quad (6.4)$$

である。これらは  $\varepsilon = i$  のとき古典運動方程式に一致する。新しい演算子  $b$  と  $\tilde{b}$  を

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{\gamma}} b, \quad p = i\sqrt{\hbar\gamma} \tilde{b} \quad (6.5a)$$

$$\{b, \tilde{b}\} = 1, \quad b^2 = \tilde{b}^2 = 0 \quad (6.5b)$$

で導入する。すると  $\hat{H}_D$  は

$$\hat{H}_D = -i\hbar\lambda \tilde{b}b \quad (6.6)$$

のように粒子数演算子  $\tilde{b}b$  の固有状態によって対角化される。 $b$  と  $\tilde{b}$  の時間変化は

$$\begin{aligned} b(t) &= e^{i\hat{H}_D t/\hbar} b(0) e^{-i\hat{H}_D t/\hbar} = e^{-\lambda t} b(0) \\ \tilde{b}(t) &= e^{i\hat{H}_D t/\hbar} \tilde{b}(0) e^{-i\hat{H}_D t/\hbar} = e^{\lambda t} \tilde{b}(0) \end{aligned} \quad (6.7)$$

したがって、当然の事ながら反交換関係 (6.5b) は不変である。

真空と 1 粒子状態は

$$b(0)|0\rangle = \langle 0|\tilde{b}(0) = 0, \quad |1\rangle = \tilde{b}(0)|0\rangle, \quad \langle 1| = \langle 0|b(0) \quad (6.8)$$

で定義される。これらは直交 Fock 空間の基底である。この空間で、生成演算子  $\tilde{b}(0)$  は消滅演算子  $b(0)$  のエルミット共役である（事実上の転置関係にある）。したがって、 $\tilde{H}_D$  は反エルミットである。Green 関数は Bose 場の場合と同様に構成できる。

$x$  と  $p$  の量子不確定性は (6.5b) のゆえに存在しない。しかし、 $x$  と  $p$  の相関については

$$\overline{xp} \equiv \lim_{t \rightarrow +0} |\langle (x(t)p(0) + p(t)x(0)) \rangle| = \hbar \quad (6.9)$$

という厳密な等式が成立する。 $x$  と  $p$  を古典的な意味で 0 とすることはできないのである。

## 7. 過減衰 Bateman 系の量子論

### 7.1 目標と考え方

この節では、有限質量の Bateman 系として過減衰 Bateman 系を取り上げ、その量子化法を探る。前節で、我々は 0 質量 Bateman 系が問題なく量子化されることを見た。そこで重要なのは、観測変数  $x$  と補助変数  $y$  が交換しないということであった。以下で見ると、過減衰 Bateman 系は 0 質量 Bateman 系の集合と見ることができるので、この特質を引き継ぎながら過減衰 Bateman 系の量子化を行うことができれば、何の問題も生じないだろうという楽天的見通しを立ててみるのである。その根拠は以下の通りである。

過減衰 Bateman 系 ( $0 < w \equiv 4m\kappa/\gamma^2 < 1$ ) では、変数  $x$  と  $y$  の運動方程式は 2 階線形微分方程式であり、それぞれが 2 つの異なった 1 階線形微分方程式 2 つを内包する。結果、 $x$  と  $y$  に対しそれぞれ 2 種類の解が可能になる。これらを、大きさが同じで符号が逆の時定数で減衰・増加する解を 1 組にして、2 つの組に分けると、それぞれの組は、パラメータが異なる 0 質量 Bateman 系とみなすことができる。従って、それぞれの組を自動的に峻別する量子化—これをここでは非正準量子化と呼ぶことにする—の方法があれば、かつそれが全系の正準量子化法と矛盾がなければ、過減衰 Bateman 系を量子論の基本要請を満たしながら正しく量子化できることになる。

このときに特に関心があるのは、一般に有限質量 Bateman 系で  $x$  と  $y$  が交換するという事実と、0 質量 Bateman 系では交換しないという事実がどのように両立するかということである。解説は Takahashi (2018b) に拠って行う。

## 7.2 過減衰 Bateman 系の新しい正準量子化法

ラグランジュアンは (3.4) で, またハミルトニアンは (3.5)

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \frac{1}{m} \left( p_x + \frac{\gamma}{2} y \right) \left( p_y - \frac{\gamma}{2} x \right) + \kappa y x \\ &= m \dot{y} \dot{x} + \kappa y x \\ 0 < w &= 4m\kappa / \gamma^2 < 1 \end{aligned} \quad (7.1)$$

で与えられる。ここで,  $w^{-1}$  は摩擦力の慣性力およびポテンシャル力に対する比を表す指標である。ハミルトニアンは本来座標変数とその共役運動量の関数として書き下されるが, (7.1) の左辺では後の便宜上座標変数の関数という表示を用いている。既に述べたように,  $x$  と  $y$  に任意の複素定数を掛けても力学は不変である。

$x$  と  $y$  に正準共役な運動量はそれぞれ

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{y} - \gamma y / 2 \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{x} + \gamma x / 2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

で与えられる。運動方程式 (3.1) と (3.6) の独立な解  $x_i, y_i$  ( $i=1,2$ ) は

$$\dot{x}_1 + \lambda_+ x_1 = 0, \quad \dot{y}_1 - \lambda_+ y_1 = 0 \quad (7.3a)$$

$$\dot{x}_2 + \lambda_- x_2 = 0, \quad \dot{y}_2 - \lambda_- y_2 = 0 \quad (7.3b)$$

のように 1 階微分方程式を満たす。ここで

$$\lambda_{\pm} = \frac{\gamma}{2m} \left( 1 \pm \sqrt{1-w} \right) \quad (7.4)$$

で, (7.3a) と (7.3b) はそれぞれ 0 質量 Bateman 系と同等であることに注意する。これらを, 元の過減衰 Bateman 系の部分系と呼ぶことにする。元の座標変数は

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2 \quad (7.5)$$

により再構成できる。逆に, (7.3) を用いて  $x_i$  と  $y_i$  は  $x$  と  $y$  で

$$x_1 = (\dot{x} + \lambda_- x) / (\lambda_- - \lambda_+), \quad y_1 = (\dot{y} - \lambda_- y) / (\lambda_+ - \lambda_-) \quad (7.6a)$$

$$x_2 = (\dot{x} + \lambda_+ x) / (\lambda_+ - \lambda_-), \quad y_2 = (\dot{y} - \lambda_+ y) / (\lambda_- - \lambda_+) \quad (7.6b)$$

のように表すことができる (Dekker 1977)。 (7.5) を (7.1) に代入し (7.3) を使うと

$$\begin{aligned} H(x, y) &= H(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= H(x_1, y_1) + H(x_2, y_2) + m(\dot{y}_1 \dot{x}_2 + \dot{y}_2 \dot{x}_1) + \kappa(y_1 x_2 + y_2 x_1) \end{aligned}$$

であるが、右辺第 3, 4 項の和は、2 次方程式の根と係数の関係より

$$(\kappa - m\lambda_+ \lambda_-)(y_1 x_2 + y_2 x_1) = 0$$

に等しいので、全ハミルトニアンは部分系のハミルトニアンの和となる：

$$H(x, y) = H(x_1, y_1) + H(x_2, y_2). \quad (7.7)$$

この分解によって、過減衰 Bateman 系は Dedene のモデルと同等になることがわかる (Dedene, 1980)。

ここで我々は、部分系の変数について 0 質量 Bateman 系のような交換関係を課して、その結果が元の変数に関する正準交換関係と一致するかを検証する。(5.12b) をヒントに、次のような非正準交換関係を仮定する：

$$\begin{aligned} [x_i, p_{j,x}] &= [y_i, p_{j,y}] = i\hbar\eta\delta_{ij}, & [x_i, y_j] &= -[y_i, x_j] = i\hbar(\zeta/\gamma)\delta_{ij} \\ [x_i, p_{j,y}] &= [y_i, p_{j,x}] = 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

$\eta$  と  $\zeta$  は運動方程式から決定されるべき定数である。結果は次のようである：

$$\eta = \frac{1}{2}, \quad \zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{1-w}} \quad (7.9)$$

この結果の導出は「補足」で行っている。 $\eta$  は正準交換関係の場合の半分である。これは部分系で元の自由度の半分の扱っていることに対応する。以下で式に符号の複号が現れたときは、上(下)の符号が (7.9) の上(下)の符号に対応する。

部分力学系 (7.3a) と (7.3b) を指標  $i$  ( $=1$  または  $2$ ) で区別することにする。すなわち

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= 1/\sqrt{1-w} \equiv \chi \\ \zeta_2 &= -1/\sqrt{1-w} = -\chi \end{aligned} \quad (7.10a)$$

$$\lambda_1 \equiv \lambda_+, \quad \lambda_2 \equiv \lambda_- \quad (7.10b)$$

正準運動量は、(7.2) を参照して

$$p_{i,x} = \frac{\gamma}{2\zeta_i} y_i, \quad p_{i,y} = -\frac{\gamma}{2\zeta_i} x_i \quad (7.11)$$

となる。

$x_i, y_i, p_{i,x}, p_{i,y}$  を

$$\begin{aligned}
 x_i(t) &= \sqrt{\frac{\hbar\zeta_i}{\gamma}} e^{-\lambda t} a_i(0), & y_i(t) &= i\sqrt{\frac{\hbar\zeta_i}{\gamma}} e^{\lambda t} \tilde{a}_i(0) \\
 p_{i,x} &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar\gamma}{\zeta_i}} e^{\lambda t} \tilde{a}_i(0), & p_{i,y} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar\gamma}{\zeta_i}} e^{-\lambda t} a_i(0)
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

のように表そう。  $x_i$  と  $y_i$  の時間反転共役は次のようである：

$$\begin{aligned}
 \overline{x_i(t, a_i(0), \zeta_i)} &= x_i(-t, \tilde{a}_i(0), -\zeta_i) = y_i(t, \tilde{a}_i(0), \zeta_i) \\
 \overline{y_i(t, \tilde{a}_i(0), \zeta_i)} &= -y_i(-t, a_i(0), -\zeta_i) = x_i(t, a_i(0), \zeta_i)
 \end{aligned}$$

全系は  $U(1) \times U(1)$  不変なので、  $x_i$  と  $y_i$  はエルミット演算子に制限する必要はない。  
 $a_i \equiv a_i(0)$  と  $\tilde{a}_i \equiv \tilde{a}_i(0)$  は次の交換関係に従う：

$$[a_i, \tilde{a}_j] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = [\tilde{a}_i, \tilde{a}_j] = 0 \tag{7.13}$$

ここで、0 質量 Bateman 系 (Takahashi 2018a) と同様に座標と運動量の  $z$ -表示に移る：

$$z_1 = \frac{x_1 - iy_1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\hbar\zeta_1}{2\gamma}} (e^{-\lambda t} a_1 + e^{\lambda t} \tilde{a}_1), \quad p_1 = \frac{p_{1,x} + ip_{1,y}}{\sqrt{2}} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar\gamma}{2\zeta_1}} (e^{\lambda t} \tilde{a}_1 - e^{-\lambda t} a_1) \tag{7.14a}$$

$$z_2 = \frac{x_2 + iy_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\hbar\zeta_2}{2\gamma}} (e^{-\lambda t} a_2 - e^{\lambda t} \tilde{a}_2), \quad p_2 = \frac{p_{2,x} - ip_{2,y}}{\sqrt{2}} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar\gamma}{2\zeta_2}} (e^{\lambda t} \tilde{a}_2 + e^{-\lambda t} a_2) \tag{7.14b}$$

$$[z_i, p_j] = \frac{1}{2} i\hbar \delta_{ij}, \quad [z_i, z_j] = [p_i, p_j] = 0 \tag{7.14c}$$

ここで  $\sqrt{1/\zeta_i} \equiv 1/\sqrt{\zeta_i}$  と定義している。

ハミルトニアンは (A5) に与えてあるが次のように表される：

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{2\zeta_i}} z_i(0) \pm i\sqrt{\frac{2\zeta_i}{\gamma}} p_i(0) \right), \quad \tilde{a}_i = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left( \pm\sqrt{\frac{\gamma}{2\zeta_i}} z_i(0) - i\sqrt{\frac{2\zeta_i}{\gamma}} p_i(0) \right) \tag{7.15a}$$

$$\hat{H}_i \equiv \hat{H}(x_i, y_i) = -i\hbar\lambda_i \tilde{a}_i a_i \tag{7.15b}$$

$a_i, \tilde{a}_i$  は昇降演算子である。(7.15a) で、複号の上 (下) の符号が  $i=1(2)$  に対応する。ハミルトニアンは粒子数演算子  $\tilde{a}_i a_i$  に比例する。Heisenberg 運動方程式によって、 $a_i$  と  $\tilde{a}_i$  の時間発展はそれぞれ  $e^{-\lambda t}$  と  $e^{\lambda t}$  で与えられる。

真空  $|0\rangle$  とその時間反転共役 (Feshbach and Tikochinsky 1977)  $\langle 0|$  をそれぞれ  $a_i$  と  $\tilde{a}_i$  で消える状態と定義すると、時刻  $t=0$  での多粒子状態は

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \tilde{a}_i^n |0\rangle / \sqrt{n!}, & \hat{H}_i |n\rangle &= -i\hbar\lambda_i n |n\rangle \\ \langle n| &= \langle 0| \tilde{a}_i^n / \sqrt{n!}, & \langle n| \hat{H}_i &= -i\hbar\lambda_i n \langle n| \end{aligned} \quad (7.16)$$

となり、これが Fock 空間を張る完全直交系となる。真空は定常的で、物理状態は部分系の直積で構成される。

### 7.3 波動関数

物理的に意味がある波動関数は、(7.14) 以下で述べた  $z$ -表示で与えられる。部分系  $i$  に対する粒子数 0 の真空は

$$\psi_0(z_i) = A_0^{-1/2} e^{-\gamma z_i^2 / (2\hbar\chi)}, \quad \chi \equiv \zeta_1 = -\zeta_2 > 0, \quad (7.17a)$$

$$\int_{C_i} \tilde{\psi}_0(z_i, t) \psi_0(z_i, t) dz_i = 1. \quad (7.17b)$$

(7.17b) で、時間反転共役状態は  $\tilde{\psi}_0(z_i, t) = \psi_0(z_i, -t)$  で与えられる。積分路  $C_i$  は積分を収束させるものなら何でも良いが、以下では  $z_i$  を  $x_i \in \mathbb{R}^1$ ,  $y_i = 0$  と選ぶことにする。1 に規格化するのは、連続の式が成り立ち確率解釈が可能だからである。すると

$$A_0 = (\pi\hbar\chi / \gamma)^{1/2}$$

となる。粒子数  $n$  の状態の波動関数は

$$\psi_{i,n}(z_i, t) = (n!)^{-1/2} e^{-n\lambda_i t} H_n(\sqrt{2\gamma / (\hbar\chi)} z_i) \psi_0(z_i) \quad (7.18)$$

ここで  $H_n$  はエルミット多項式である。時間依存性を除けば、本質的に調和振動子と同じ形である。全波動関数は積  $\psi_{1,n}(z_1, t) \psi_{2,l}(z_2, t)$  となる。変数の“座標”  $z_i$  は  $x_i$  と  $y_i$  のある特定の線形結合であることに注意されたい。例えば、(7.6a) と (7.14a) から

$$z_1 = \frac{x_1 - iy_1}{\sqrt{2}} = -\frac{\dot{x} + i\dot{y} + \lambda_-(x - iy)}{\sqrt{2}(\lambda_+ - \lambda_-)}$$

である。すなわち、 $z$ -表示の座標変数には、元々の座標に加え速度も含まれているのである。これにより、Feshbach & Tikochinsky (1977), Celeghini et al. (1992), Blasone & Jizba (2004) が見つけた波動関数よりも見かけ上はるかに単純な波動関数を得ることができた。内積を定義するための時間反転共役波動関数も前と同様に構成できる。

### 7.4 量子揺らぎと不確定性関係

規格化可能な波動関数が存在することが分かったので、量子揺らぎを求めることができる。



粒子数  $n$  の状態における座標と共役運動量の揺らぎは

$$\langle z_1^2 \rangle = \langle z_2^2 \rangle = \frac{\hbar\chi}{\gamma} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (7.19a)$$

$$\langle p_1^2 \rangle = \langle p_2^2 \rangle = \frac{\hbar\gamma}{4\chi} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (7.19b)$$

である。

元の座標と運動量

$$z = z_1 + z_2, \quad p = p_1 + p_2 \quad (7.20)$$

は正準交換関係

$$[z, p] = i\hbar \quad (7.21)$$

を満たすことは直ちにわかる。部分系の粒子数がそれぞれ  $n$  と  $l$  である状態  $|n, l\rangle$  における量子揺らぎは

$$\langle z^2 \rangle = \frac{\hbar\chi}{\gamma} (n+l+1) \equiv \Delta z^2, \quad (7.22a)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar\gamma}{4\chi} (n+l+1) \equiv \Delta p^2 \quad (7.22b)$$

であるので、不確定性関係

$$\Delta z \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad (7.23)$$

が成立する。(7.23) はハミルトニアン固有状態に関して成り立つので、他のいかなる状態も不確定性関係を破らない。

この結果を得たのは、 $z^2$  が  $z_1^2 \sim (x_1 y_1 + y_1 x_1)/2$  と  $z_2^2 \sim (x_2 y_2 + y_2 x_2)/2$  を含んでいるからである。(7.12) からわかるように、これらは互いに時間反転共役関係にある変数の積  $x_1 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_1 x_1$  や  $x_2 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_2 x_2$  を含んでいて、期待値に 0 でない寄与を与えているのである。これが「 $z$ -表示のみが物理的に意味がある」ということの意味である。このことはまた、部分系の変数の関数  $g(x_1, x_2)$  の期待値を知りたいときは、 $s$  をある定数として

$$g(x_1, x_2) \rightarrow g(s z_1, s z_2) \quad (7.24)$$

と変数を置き換えた関数の  $z$ -表示での期待値を計算すればよいことを意味する。 $s$  はこれまでの議論では決まらない<sup>21</sup>。それは、任意の 0 でない  $s$  によるスケール変換  $z_i \rightarrow s z_i$  に対し、

<sup>21</sup> Takahashi (2018b) は  $s = \sqrt{2}$  と選んだが、これには必然性はない。7.5 で述べるように、本論文では別の値を採用することになる。

$p_i \rightarrow s^{-1}p_i$  であり, 正準交換関係は不変に保たれるからである。われわれは以下で, 過減衰 Bateman 系は 0 質量の極限で 0 質量 Bateman 系に移行することを要請することで  $s$  の値を決めることができることを見るであろう。

古典論での観測量も計算は可能である。例として  $x = x_1 + x_2$  をとり, その真空における量子揺らぎを求めてみよう。我々の規則に従って,  $x$  は  $s(z_1 + z_2)$  で置き換える。(7.14a), (7.19a) と (7.24) により

$$\begin{aligned} \langle z_1^2 \rangle &= \langle z_2^2 \rangle = \frac{\hbar\chi}{2\gamma} \\ \Delta x^2 \equiv \langle x_1^2 + x_2^2 \rangle &= s^2 \langle z_1^2 + z_2^2 \rangle = s^2 \frac{\hbar\chi}{\gamma} \end{aligned} \quad (7.25)$$

となるが, これは座標表示で直接積分を実行して得られる

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\mathbb{C}} \tilde{\psi}_{i,0}(z_i) x_i^2 \psi_{i,0}(z_i) dz_i &= \sum_i s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{i,0}(z_i) z_i^2 \psi_{i,0}(z_i) dz_i \\ &= 2 \times s^2 \frac{\hbar\chi}{2\gamma} \\ &= s^2 \frac{\hbar\chi}{\gamma} \end{aligned}$$

と一致する。

古典論での力学的運動量

$$m(\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t)) = m(-\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))$$

についてはどうだろうか。我々の規則によればこれは  $z$ -表示

$$p_m \equiv sm(-\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$$

で置き換えなければならない。 $\lambda_i$  は (7.4) で与えられる実数である。したがって真空での揺らぎは

$$\Delta p_m^2 = s^2 m^2 \langle |\lambda_1|^2 z_1^2 + |\lambda_2|^2 z_2^2 \rangle = \frac{s^2}{2} \hbar\chi \left(1 - \frac{w}{2}\right) \quad (7.26)$$

で与えられることになる。(7.25) と (7.26) より

$$\Delta x \cdot \Delta p_m = s^2 \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{2-w}{1-w}} \quad (7.27)$$

不確定性の積は時間によらず一定であるが,  $w \rightarrow 1_-$  の極限で発散する。

## 7.5 自由度の復元と正準量子化

これまでの議論から, (7.5) で与えられる座標変数  $x$  と  $y$  および以下で与えられる運動量

$p_x$  と  $p_y$

$$p_x = p_{1x} + p_{2x}, \quad p_y = p_{1y} + p_{2y} \quad (7.28)$$

は元の全自由度 4 を回復し, 正準量子化条件

$$[x, p_x] = [y, p_y] = i\hbar, \quad [x, p_y] = [y, p_x] = [x, y] = 0 \quad (7.29)$$

を満たす。 $x$  と  $y$  の自由度がそれぞれ 2 になり, これらが交換することができたことに注意せよ。質量 0 のときは, 2 つのモードのうちの 1 つが初めから存在しないために,  $x$  と  $y$  は交換しなくなるのである。

量子化されたハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = -i\hbar(\lambda_1 \tilde{a}_1 a_1 + \lambda_2 \tilde{a}_2 a_2). \quad (7.30)$$

となる。

任意の相関関数も上記の規則に従って求めることが可能である。2 体 Green 関数は

$$G(t) \equiv -\frac{s^2}{\hbar} \langle 0 | T z(t) z(0) | 0 \rangle = -\frac{s^2 \chi}{2\gamma} \left[ \theta(t) (e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}) + \theta(-t) (e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}) \right] \quad (7.31a)$$

$$\left( m \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \kappa \right) G(t) = s^2 \chi \delta(t), \quad t \geq 0 \quad (7.31b)$$

(7.31a) による量子揺動散逸関係は  $-G(0_+) = s^2 \chi / \gamma$  となる。

## 8. 過少減衰 Bateman 系の量子化

### 8.1 過少減衰領域での非正準量子化

有限質量の Bateman 系で研究者の関心を集めたのは過少減衰系だった。それは, 過少減衰 Bateman 系は減衰調和振動子というエネルギー散逸を表す最も単純な系に対応するからである。しかし, 既に第 4 節でみたように, 過少減衰 Bateman 系の正準量子化には重大な問題が内在する (Caldirola 1941, Kanai 1948, Feshbach & Tikochinsky 1977, Dekker 1981, Celeghini *et al.* 1992, Um *et al.* 2002)。Bateman 系以外の散逸系を探す試みがあったが, 現実の物理系を記述するのに十分な内容を含むとは思えないので, ここでは割愛するが, すぐれた総合報告としては Dekker (1981) によるものがある。

ここで, 第 7 節で用いた量子化の手続きを過少減衰 Bateman 系の量子化に適用し, どのような結果になるかを見ることにする。過減衰 Bateman 系との違いは, 換算角振動数が

$$\left( \kappa / m - \gamma^2 / 4 \right)^{1/2} = (\gamma / 2) \sqrt{w - 1}$$

となることである。 $w = 4m\kappa/\gamma^2$  は 1 より大きく、減衰率 (7.4) は複素数になる。これに応じて、観測量  $x$  の期待値は複素数になるが、これは線形方程式の解の複素数表示とみなされる。すると、議論は前節の過減衰 Bateman 系の量子化と同様に進められる。部分系は  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1$  または  $2$ , で表す。 $x_i$  と  $y_i$  はここでも自己共役ではない。

それぞれの部分系に対し、(7.8) と同様な量子化条件を課す。混同を避けるために、ここでは  $\zeta$  の代わりに  $\zeta'$  という記号を使うことにする。減衰定数  $\lambda_{\pm}$  は複素数なので  $\zeta'$  も複素数であろう。 $y_i$  は  $x_i$  に共役な運動量演算子と同等である。したがって、古典的には  $x_i$  が減少すれば  $y_i$  は増大する（前向きな時間経過）という関係が、量子論では不確定性関係として持ち込まれることになる。

運動方程式と辻褃があうためには

$$\eta = \frac{1}{2}, \quad i\zeta'_i = \pm \frac{1}{\sqrt{w-1}}, \quad i=1, 2 \quad (8.1)$$

でなければならない。過減衰との違いは  $\sqrt{1-w}$  が  $i\sqrt{w-1}$  で置き換えられたことで、このことから、過少減衰 Bateman 系の量子論と過減衰 Bateman 系の量子論は、 $w$  を変数とした関数の解析接続で繋がることになる。

減衰率は

$$\lambda_i = \lambda_{\pm} = \frac{\gamma}{2m} (1 \pm i\sqrt{w-1}) \quad (8.2)$$

となる。以後、複号の上 (下) の符号は (8.1) の上 (下) の符号に対応する。

(7.11) の正準共役運動量は

$$p_{i,x} = \frac{\gamma}{2\zeta'_i} y_i = \pm i \frac{\gamma\sqrt{w-1}}{2} y_i, \quad p_{i,y} = -\frac{\gamma}{2\zeta'_i} x_i = \mp i \frac{\gamma\sqrt{w-1}}{2} x_i \quad (8.3)$$

である。交換関係 (7.8) は、部分系の座標と運動量として次のような表示を採用することで満たすことができる：

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sqrt{\frac{\hbar\zeta'_i}{\gamma}} e^{-\lambda_i t} a_i, & y_i(t) &= \sqrt{\frac{\hbar\zeta'_i}{\gamma}} e^{\lambda_i t} \tilde{a}_i \\ p_{i,x}(t) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar\gamma}{\zeta'_i}} e^{\lambda_i t} \tilde{a}_i, & p_{i,y}(t) &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar\gamma}{\zeta'_i}} e^{-\lambda_i t} a_i \end{aligned} \quad (8.4)$$

ここで  $\zeta_i \equiv i\zeta'_i = \pm 1/\sqrt{w-1}$  である。 $a_i$  と  $\tilde{a}_i$  は (7.13) と同じ交換関係を満たす。(7.12) と位相因子のぶんどけ見かけ上異なった表示を採っているが、どちらでも同じで本質的な違いはない。

(7.7), (7.1) に (8.4) の  $x_i$  と  $y_i$  およびそれらの時間微分を代入してハミルトニアン演算子形として

$$\hat{H} = -i\hbar \sum_i \lambda_i \tilde{a}_i a_i = \hbar \sum_i \omega_i \tilde{a}_i a_i, \quad \omega_i = -i\lambda_i \quad (8.5)$$

を得る。Feshbach-Tikochinsky ハミルトニアンとは異なり、この段階で既に対角化されている (Feshbach & Tikochinsky 1977, Celeghini *et al.* 1992)。従って、前節と同じ議論により、 $a_i$  で消滅する真空と  $\tilde{a}_i$  で消滅する時間反転共役真空は時間的に変化せず定常である<sup>22</sup>。各部分系において規格化された多粒子状態は、それらの直積で全 Hilbert 空間の完全直交基底となる。

### 8.2 波動関数, 正準量子化, 不確定性関係

$z$ -表示に移るために、部分系の  $z$ -表示座標と  $z$ -表示運動量を

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\hbar \zeta_1}{2\gamma}} \left( e^{-\lambda_1 t} a_1 + e^{\lambda_1 t} \tilde{a}_1 \right) \\ z_2 &= \frac{x_2 - y_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\hbar \zeta_2}{2\gamma}} \left( e^{-\lambda_2 t} a_2 - e^{\lambda_2 t} \tilde{a}_2 \right) \end{aligned} \quad (8.6a)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{p_{1,x} + p_{1,y}}{\sqrt{2}} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar \gamma}{2\zeta_1}} \left( e^{\lambda_1 t} \tilde{a}_1 - e^{-\lambda_1 t} a_1 \right) \\ p_2 &= \frac{p_{2,x} - p_{2,y}}{\sqrt{2}} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar \gamma}{2\zeta_2}} \left( e^{\lambda_2 t} \tilde{a}_2 + e^{-\lambda_2 t} a_2 \right) \end{aligned} \quad (8.6b)$$

で導入する。それぞれ (7.14a), (7.14b) と同形なので前節の議論をそのまま辿ることが<sup>s</sup>できる。上記の  $z_i$  と  $p_i$  を用い、一般的な演算子解を (7.20) のように和で構成する。これらは正準交換関係を満たす。正しい不確定性関係 (7.23) も  $z$  表示を用いて導くことができる。

真空の波動関数は (7.17) で、多粒子状態は (7.18) で与えられる。規格化定数も

$$\int_{C_i} \tilde{\psi}_0(z_i, t) \psi_0(z_i, t) dz_i = 1 \quad (8.7)$$

において積分路  $C_i$  を  $(2\gamma / (\hbar\chi))^{1/2} z_i$  が実数になるように選べば  $|A_0| = |\pi\hbar\chi / \gamma|^{1/2}$  と決定できる。位相は決まらず、任意にとってよい。

真空での量子揺らぎを波動関数 (7.17a) を用いて求めてみる。 $x = x_1 + x_2$  に関しては (7.25) より

$$\Delta x^2 = s^2 \frac{\hbar}{\gamma \sqrt{w-1}} \quad (8.8)$$

<sup>22</sup>  $\text{Re}(\omega_2) < 0$  であるが、 $\hat{H}$  はエネルギーではないのでこのことは真空の安定に影響しない。

となる。力学運動量としては過減衰の場合と同様  $p_m = -sm(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$  を採用する。揺らぎは  $\Delta p_m^2 = s^2 m^2 \langle |\lambda_1|^2 z_1^2 + |\lambda_2|^2 z_2^2 \rangle$  であるが<sup>23</sup>、いまは  $|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = (\gamma/2m)^2 w$  である。C<sub>i</sub> 上の積分を実行して

$$\begin{aligned} \Delta p_m^2 &= s^2 m^2 |\lambda_1|^2 \iint_C \tilde{\psi}_{1,0}(z_1, t) \tilde{\psi}_{2,0}(z_2, t) (z_1^2 + z_2^2) \psi_{2,0}(z_2, t) \psi_{1,0}(z_1, t) dz_1 dz_2 \\ &= s^2 \frac{\hbar}{4} \gamma \frac{w}{\sqrt{w-1}} \end{aligned} \quad (8.9)$$

(8.8) と (8.9) から、再び時間に依存しない不確定性関係を得る：

$$\Delta x \cdot \Delta p_m = s^2 \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{w}{w-1}} \quad (8.10)$$

(8.10) の右辺の  $\sqrt{w/(w-1)}$  は散逸のない角振動数と換算角振動数の比に等しい。

Dekker (1977, 1981) は、“修正 Bopp 模型”<sup>23</sup> を用い、密度行列のマスター方程式を解いて時間依存性を持つ不確定性関係を得た。無限の時間経過後に、この不確定性関係は定数に到達する。その定数と (8.10) の右辺は

$$s^2 = 1$$

のときに一致する。また、この場合に (8.10) は散逸のない極限  $w \rightarrow \infty$  で調和振動子の不確定性関係に一致する。 $s$  としては (8.11) を採用すべきなのである。しかしそれでも、過減衰 Bateman 系の場合と同じく  $w \rightarrow 1$  で発散する。やはり、古典論での物理量をそのまま量子論に持ち込むことはできない。あくまでも、正しい不確定性関係は  $z$  表示のもとで保つことができるのである。

## 9. ま と め

我々の通常世界を構成する要素は、時間に関し可逆な法則に従う。すなわち、要素が従う法則は時間反転対称性を持っている。しかし、自由度が大きい系は時間に関し不可逆であり、このことは熱力学第2法則—エントロピー増大則—として確立している。これは統計的法則である。エネルギーの散逸や原子集団の拡散はエントロピーを増大させる過程で、従って散逸・拡散の法則は時間反転対称性を持たないはずである。Lengivan 方程式やマスター方程

<sup>23</sup> 過少減衰 Bateman 系で、エルミットでないハミルトニアンを用い、しかし座標変数と運動量変数はエルミット演算子の表示が用いられる。我々のモデルとの違いは、Hilbert 空間での内積を、前者はエルミット共役状態とでつくるのに対し、後者では時間反転共役状態とでつくることにある。Dekker の“修正 Bopp 模型”で、不確定性関係に時間依存性が表れるのは、ハミルトニアンの固有状態を用いなかったからである。

式のように、確率統計理論を援用して系を記述するというのは古典世界を記述する上ではまことに自然なことである。

これらとは全く異なったアプローチをとったのが Bateman 系である。Bateman 系は、補助変数を導入することで時間反転対称性を維持しながら散逸拡散現象を記述する、力学の正準形式を適用できる系である。一見して正準量子化も可能のように思われるのであるが、実際は単純な正準量子化の手続きが真空の不安定や Heisenberg の不確定性関係との不整合という、極めて不都合な結果をもたらすことが知られていた。

本論文で、有限質量 Bateman 系の量子化が、安定な Hilbert 空間内で Heisenberg の不確定性原理を破ることなくできることを示した。そのために必要なのは以下の手続きに従うことである。

- ① 互いに時間反転共役なベクトルで内積を定義する。
- ② 元の系を、 $x = x_1 + x_2$ ,  $y = y_1 + y_2$  によって 2 つの部分系に分ける。
- ③ 各部分系内で、補助座標 ( $y_i$ ) を観測座標 ( $x_i$ ) の共役運動量とみなす。
- ④ 各部分系が、元の Bateman 運動方程式の独立な解の組で構成されるように、各変数に交換関係を課す。
- ⑤ 各部分系で、座標と共役運動量の線形結合で“z-表示”の変数を構成する。
- ⑥ 部分系の変数を加え合わせて、元の Bateman 系の変数を再構成する。
- ⑦ 全ハミルトニアンを部分系ハミルトニアンの和で再構成する。
- ⑧ Schrödinger 方程式を z-表示で解いて波動関数を求める。

我々のアプローチにおいて、座標と運動量はエルミット演算子ではなくなるという、これまでの標準的方法との大きな違いが現れる。このようなことが可能だったのは、Bateman 系にもともと  $U(1)$  不変性があったためで、ハミルトニアンが直ちに粒子数固有状態で対角化された形で得られるという効用をもたらした。

困るのは、座標表示の理論をつくることができないということである。これは、0 質量の Bateman 系では致命的で、もしもこの事実をそのまま受け入れれば、Bateman 系の量子論は不可能であるということになる。古典的には、Bateman 系が系の大小に関係なく散逸過程を正しく記述することは分かっているのだから、これは何かがおかしい。この問題を、我々は③で述べた“z-表示”を採用することで解決した。z-表示は、古典量に対応する量を共役量との線形結合で表すもので、これにより正しい量子相関を取り入れることができた。

z-表示のアイデアは既に Dedene (1980) と Dekker (1981) によって提案されていた。それがうまくいかなかったのは、状態ベクトルの内積の定義にエルミット共役を用いていたた



めである。そのため、揺らぎも含めてすべての観測量が時間依存性をもち、かつ指数関数的に減少する。このようなことは、少なくとも真空状態あるいは基底状態では起きてはいけない。

この問題は、Feshbach & Tikochinsky (1977) の提案による、①の時間反転共役 (Hilbert 空間において基底の時間変数の符号を変え、同時にベクトルの複素共役をとる。これは、ハミルトニアンがエルミットのときは複素共役に一致する) を用いることで解決された。時間反転共役は、指数関数による時間依存性を消すので、真空の揺らぎも時間依存性が無い。さらに重要なのは、確率密度流の保存により波動関数の確率解釈を維持することができ、論理的な矛盾を含まない量子論が構築されうることである。現象との整合性が検証可能な場の量子論については、別稿で解説する。

#### 補足 部分系の量子化条件 (7.9) の導出

いずれか一つの部分系に話を限り、部分系を指定する指標は書かないことにする。交換関係

$$[x, \dot{y}] = \left[ x, \frac{1}{m} \left( p_x + \frac{\gamma}{2} y \right) \right] = i\hbar \frac{\eta + \zeta/2}{m} = [y, \dot{x}] \quad (\text{A1})$$

を使うと、Heisenberg 運動方程式は

$$\dot{x} = -\lambda x, \quad \dot{y} = \lambda y, \quad \lambda \equiv \frac{\zeta}{\eta + \zeta/2 - 1} \frac{\kappa}{\gamma} \quad (\text{A2})$$

これが (7.3) と同じであるためには

$$\frac{\zeta/2}{\eta + \zeta/2 - 1} w = 1 \pm \sqrt{1 - w} \quad (\text{A3})$$

(A2) を用いるとハミルトニアン (7.1) は

$$H = kyx, \quad k = \kappa \left( 1 - \left( \frac{\zeta}{1 - \eta - \zeta/2} \right)^2 \frac{w}{4} \right) \quad (\text{A4})$$

このハミルトニアンも同じ運動方程式を生成しなければならない。このことから

$$\lambda = -\kappa \frac{\zeta}{\gamma} \left( 1 - \left( \frac{\zeta}{1 - \eta - \zeta/2} \right)^2 \frac{w}{4} \right) \quad (\text{A5})$$

(7.5) は (A2), (A3), (A5) から得られる。

参考文献

- Bateman H 1931 “On dissipative systems and related variational principles” *Phys. Rev.* **38**, 815-819.
- Blasone M and Jizba P 2004 “Bateman’s dual system revisited : quantization, geometric phase and relation with the ground-state energy of the linear harmonic oscillator” *Ann. Phys.* **312**, 354-397.
- Caldirola P 1941 “Forze non conservative nella meccanica quantistica” *Nuovo Cimento* **18**, 393-400.
- Casanova J, Romero G, Lizuain I, García-Ripoll J J and Solano E 2010 “Deep strong coupling regime of the Jaynes-Cummings model” *Phys. Rev. Lett.* **105** 263603.
- Celeghini E, Rasetti M and Vitiello G 1992 “Quantum dissipation” *Ann. Phys.* **215**, 156-170.
- Ciuti C, Bastard G and Carusotto I 2005 “Quantum vacuum properties of the intersubband cavity polariton field” *Phys. Rev. B* **72** 115303.
- Coffey W T, Kalmykov Yu P and Waldron J T 2004 *The Langevin Equation. With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering* 2nd ed. (World Scientific, Singapore).
- Dedene G 1980 “Oscillators and complex Hamiltonian calculus” *Physica* **103A**, 371-378.
- Dekker H 1977 “Quantization of the linearly damped harmonic oscillator” *Phys. Rev. A* **16**, 2126-2134.
- Dekker H 1981 “Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator” *Phys. Rep.* **80**, 1-112.
- Einstein A 1905 *Investigations on the theory of the Brownian movement* (Dover Publications Inc. 1926) ed. Fürth R.
- Feshbach H and Tikochinsky Y 1977 “Quantization of the damped harmonic oscillator” *N.Y. Acad. Sci.* **38** 44-53.
- Hasse R 1975 “On the quantum mechanical treatment of dissipative systems” *J. Math. Phys.* **16**, 2005-2011.
- Kanai E 1948 “On the quantization of the dissipative systems” *Prog. Theor. Phys.* **3**, 440-442.
- Perelomov A 1986 *Generalized coherent states and their applications*, Chaps. 5 and 18.
- Takahashi K 2017 “Mean-field theory of turbulence from variational principle and its application to the rotation of a thin fluid disk” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017**, 083J01.
- Takahashi K 2018a “On the quantization of the massless Bateman system” *J. Math. Phys.* **59**, 032103.
- Takahashi K 2018b “On the quantization of the massive Bateman system” *J. Math. Phys.* **59**, 072108.
- Uhlenbeck G E and Ornstein L S 1930 “On the theory of the Brownian motion” *Phys. Rev.* **36**, 823-841.
- Um C-I, Yeon K-H and George T F 2002 “The quantum damped harmonic oscillator” *Phys. Rep.* **362**, 63-192.
- 寺本 英 1990 『ランダムな現象の数学』 (吉岡書店)