

【論 文】

地震のセルオートマトンにおけるリズムと構造

—— 決定論的モデル ——

高 橋 光 一

現象論的スケーリング則を導く地震の決定論的セルオートマトンモデルは、同時にある種のリズムと構造を周期的に形成することを示す。

Bak と Tang は、臨界現象としての地震の特性がセルオートマトンモデルによって簡単にモデル化できることを最初に示し、それに続くこの領域の多くの研究の端緒を開いた (Bak and Tang 1989)。彼らのモデルはそれまでの標準的地震モデルであるバネブロックモデル (Burridge and Knopoff 1967, Dieterich 1979, Kato and Hirasawa 1998) の結果を考慮した確率論的なものであった。すなわち、地殻破壊という事象の原因となるストレスエネルギー蓄積の場所は、各時刻ごとに偶然で決まるとしたのである。このモデルから、地震が臨界現象*であることを示す Gutenberg-Richter-石本-飯田のスケーリング公式が導出できること、そしてモデルにおける地震発生の時系列に法則性がないことから、彼らは地震の予知は不可能であると結論したのであった。

ところで、物理学の信頼性は、状況に応じた誤差の範囲で‘予知’ができるところにその要因の一つがあった。地震についても、ある程度のゆらぎの範囲内で周期性があることは観測的には早くから認められていたことである。他方、Bak-Tang のモデルでは、二つの引き続く事象の起きる場所は確率的に選択されるが、それにもかかわらず事象間の時間間隔は定まっている。したがって、彼らの時間を現実の物理的時間に対応させることはできず、モデルから帰結される事象の時系列を物理的時系列とみなすこともできない。

思い切ってモデルを決定論的に、あるいはある時刻にセルが事象を起こす確率 p を導入して作り替えるとどうなるだろうか。この場合、Bak-Tang モデルの上記の難点は解消される。

*臨界現象とは、その現象に伴う特徴的な時間や空間の長さが存在しないものをいう。特徴的な物理量が存在する場合は、その量を境にして現象に量的な変化が明確に認められる。例えば、放射性元素の崩壊では、半減期という特徴的な時間があるが、それを越えた時間では放射線の強度に明確な変化が現れる。臨界現象ではそのようなことがなく、強度の大きい現象は強度の小さい現象をある仕方では比例的に拡大したものと本質的に同等であり、両者の間に物理的に意味のある境界を設けることができない。このことを、「臨界現象においては、さまざまな物理量の間には‘スケーリング’の関係が成立する」と表現する。

この問題に対する部分的な答は Takahashi (2011) によって得られた。彼は、時間刻みごとに一定量のエネルギーがすべてのセルに蓄積される—すなわち $p=1$ —というモデルを提示した。テクトニクスの運動状態にある地殻の比較的狭い領域では、このようなことが起きている可能性も否定できないのである。結果的には、Gutenberg-Richter-石本-飯田のスケーリング則や、余震頻度の時間依存性に関する大森則と矛盾しない現象が起きることが示された。

Takahashi のモデルで興味深いのは、長期的なシミュレーションでは地震の生起に近似的な周期性—擬周期性—が認められたことである。同時に、セルに蓄積されるエネルギーの分布に特徴的なパターンが生じることも示されている。この論文の目的は、これらの二点についてさらに詳しい数理的調査を行った結果を報告することにある。

始めに、Takahashi (2011) のモデルを復習しておく。セルオートマトンは $N=L \times L$ 個のセルからなる 2 次元の正方格子である。各セルを整数の組 (i, j) で、またセルのエネルギーを $E_{i,j}$ で表す。各時刻 t で、すべてのセルのエネルギーは

$$E_{i,j} \rightarrow E_{i,j} + \Delta E \quad (1)$$

のように一定量 ΔE だけ増加する。 $E_{i,j}$ が 4 を超えると、そのエネルギーは次の規則に従って Neuman 近傍にある近隣セルに分配される：

$$E_{i,j} \rightarrow E_{i,j} - 4, \quad (2a)$$

$$E_{i \pm 1, j} \rightarrow E_{i \pm 1, j} + 1, \quad (2b)$$

$$E_{i, j \pm 1} \rightarrow E_{i, j \pm 1} + 1. \quad (2c)$$

このエネルギー再分配を行うかどうかのチェックは、各時刻で空間的に一方向、すなわち $(i, j) \rightarrow (i, j+1)$, $(i, L) \rightarrow (i+1, 1)$ の順に行う。したがって、 $E_{i,j}$ が 4 より小さくても、その近傍のセルが 4 より大きいエネルギーを持てば、(2) の操作の後に $E_{i,j}$ が 6 に近い値になることは起こりうる。(2a) に従ってエネルギーを放出しているセルは活動的であるという。力学=法則の内容は (1) と (2) で表されている通りで、確率的要素は入っていない。われわれのセルオートマトンは決定論的力学系である。

図 1 に $E_{1,1}$ と $E_{12,12}$ の時間変化を示す。パラメータは $L=23$, $\Delta E = 0.005$ とした。また初期条件は $E_{i,j} = 0.5r + 3$ によって与えられている。ここで r は $[0, 1]$ の一様乱数である。図 1 を見てわかることは、セル活動に異なった二種の期間があるということである。活動期においては、 $E_{i,j}$ は 0 とある有限の値の間で定期的に変化する。静止期においては、 $E_{i,j}$ は 1 時間刻みごとに $\Delta E = 0.005$ の割合で線形的に増加する。

活動期の中になんらかの特徴的な規則性を見いだすのは殆ど不可能である。他のセルの活

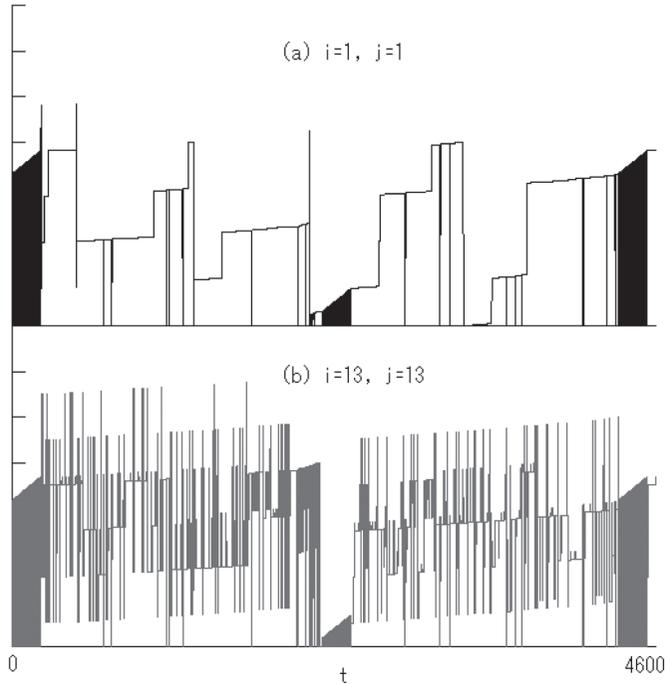


図1 セル状態の時間変化の例。(a) $E_{1,1}$. (b) $E_{12,12}$. 静止期 (図では塗りつぶされた台形) の時間刻み幅は見やすさのために倍に伸ばされている。(b) で値が6を超えるところまでに達しているのは、シミュレーションで採用したアルゴリズムのためである。

動でも同様で、これは Bak と Tang の確率的モデル (Bak and Tang 1989) と同様な結果である。

われわれの決定論的モデルと Bak-Tang の確率論的モデルには二つの共通点がある。一つは、系全体へのエネルギー供給率は一定であること、もう一つは、解放されたエネルギーは系の縁では外部に流れ出ることである。これらは、プレートテクトニクスの運動に起源をもち、かつ断層で区切られた領域内で起きる地震を理想化したことによるものであるが、非常に長い時間の中で見ればなんらかの時間間隔での現象の繰り返しが起きることを期待させる条件でもある。Takahashi (2011) は、事実、このような擬周期性が決定論的モデルで表れる状況証拠を見出した。図1で、活動期と静止期それぞれの長さは同じオーダーにあるように見えることがそれに相当する。以下で、この点をさらに明確にしたい。

地震のセルオートマトンで変化の行方を支配するのはエネルギーなので、とりあえず全系の時間変化を捉える量として全エネルギーを考えてみることにする。すなわち、

$$\langle E \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_{i,j} E_{i,j} \quad (3)$$

というセルエネルギーの平均値の時間変化を調べる。結果を図2(a)に示す。

図2aで、 $\langle E \rangle$ の擬周期性は明瞭である。 $\langle E \rangle$ は静止期で直線的に増加し、その後活動期

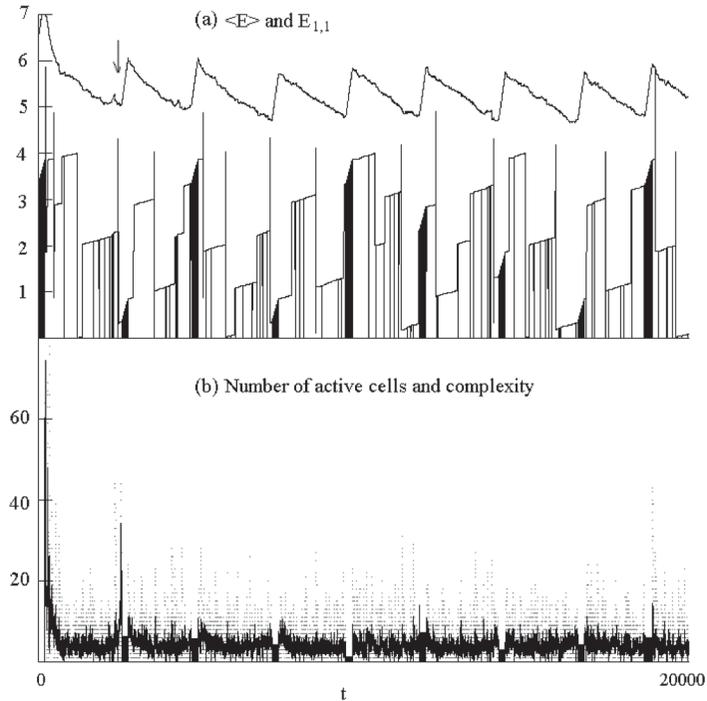


図2 (a) $\langle E \rangle \times 10$ (のこぎり刃状の曲線) と $E_{1,1}$ (カミソリ刃状の曲線) の時間変化, (b) 活動セル数 (点) と複雑度 (本文参照) $\times 1,000$ の時間変化。静止期の時間刻みは、見やすさのために倍にしている。

ではほぼ直線的に減少する。こうした変化は約 $2190 (\pm 170)$ の時間周期で繰り返す。活動期と静止期の平均比は約 19 : 1 である。静止期の長さは約 100 であるが、これは静止期が始まる時のセルの最大エネルギーが約 $3.5 ((4 - 3.5) / 0.005 = 100)$ 、すなわち初期状態でのセルエネルギーの最大値であることを意味する。

地震モデルでの地殻活動強度の目安である活動セルの数の時間変化を図 2 (b) にプロットした。これもまったく不規則に変化している。

系が全体として示す擬周期性は、個々のセル状態のでたらめさと比較すると注目すべき現象である。系へのエネルギー供給率が一定で、余ったエネルギーは周辺から流れ出ることになっているので、長期的に見たときに、決定論的であろうと確率論的であろうとなんらかの平均化をした場合に周期的振る舞いが現れるのはそれほど不思議なことではないだろう。驚くのは、ここで見いだされた擬周期性が、化学反応や生体の自己組織化現象でのほぼ厳密な周期性によく似ていることである。この周期の長さを規則 (1) と初期状態から演繹的に導くのは、 L が大きい場合はほぼ不可能であると思われる。

前の研究で、セルのエネルギーを適当に粗視化すると、系は静止期の開始時 (図 2(a) の

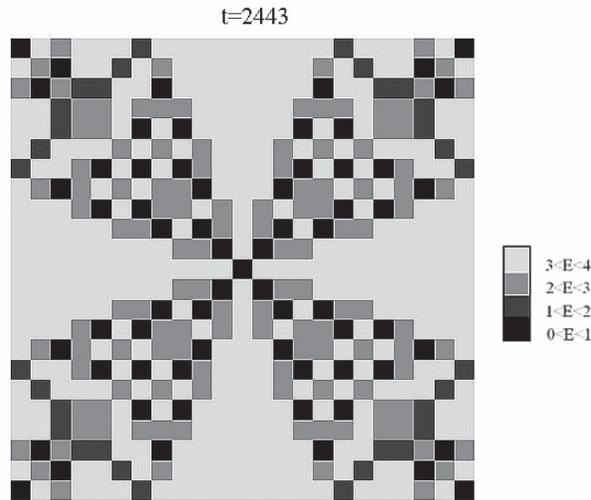


図3 最初の活動期直後 ($t=2443$) に系が通過する粗視化状態。 C_{4v} 対称性が認められる。4つの灰色は図の右に与えた4つのエネルギー範囲（粗視化の分解能が1）に対応している。

矢印)に対称性が高い状態を通ることを知った (Takahashi 2011 の図2を参照)。 $L=23$ におけるこの状態を図3に示す。これは粗視化の分解能が1の場合である。

図3の状態は C_{4v} 対称であるが、初期状態がでたために設定されたこと、このセル間のでたためさは規則(1)によって以後消滅しないことを考えると、全く予想外の事実である。系は、初期状態に依らず、また活動期の不規則運動に依らず、図3の粗視状態をほぼ必ず通過するのである。 L を変えると、詳細は変化するものの全体としてのパターンは変わらない。これは、図3の状態が、状態空間中で系がとる軌跡の節となっていることを意味する。われわれはこの状態を粗視化された節 (coarse-grained node CGN, 図4を参照)と呼ぶことにする。

繰り返し現れる静止期のはじめの状態を見ると、さらに驚くべき事が起きていることが判明する。初めの16の静止期における初期の状態を時間の順序に従って集めたものを図5に示す。それらは厳密なあるいは小さく破れた C_{4v} 対称性を持っていることがわかる。さらに、それらを4つのグループに分類することができる。図5では、そのグループを中心部のパターンの形状に従ってXエックス、Plus プラス、Squared plus 四角付きプラス、およびSquare 四角と名付けそれぞれX, P, SP およびSの記号で表している。

初期状態を僅かに変えてもこれらのパターンとその出現順序が変わることはないのは注目に値する。活動期の粗視化状態はきわめて乱雑でかつ初期状態に敏感に依存することと対照的である。このことから、図5に示した粗視化状態は全て先に定義したCGNに他ならないことが分かる。どんなに長時間にわたっても、出現するCGNの各パターンとその順序が初期条件に依存しないのであれば、CGNのすべての組を一つのアトラクターとみなすことが

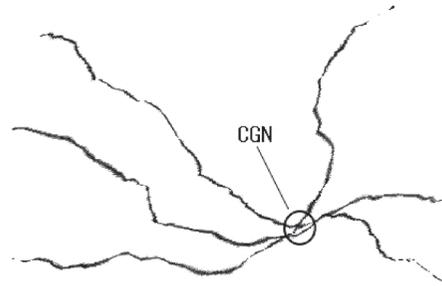


図 4 CGN の概念図。この図では 3 本の軌跡が一つの CGN に入入りしている。

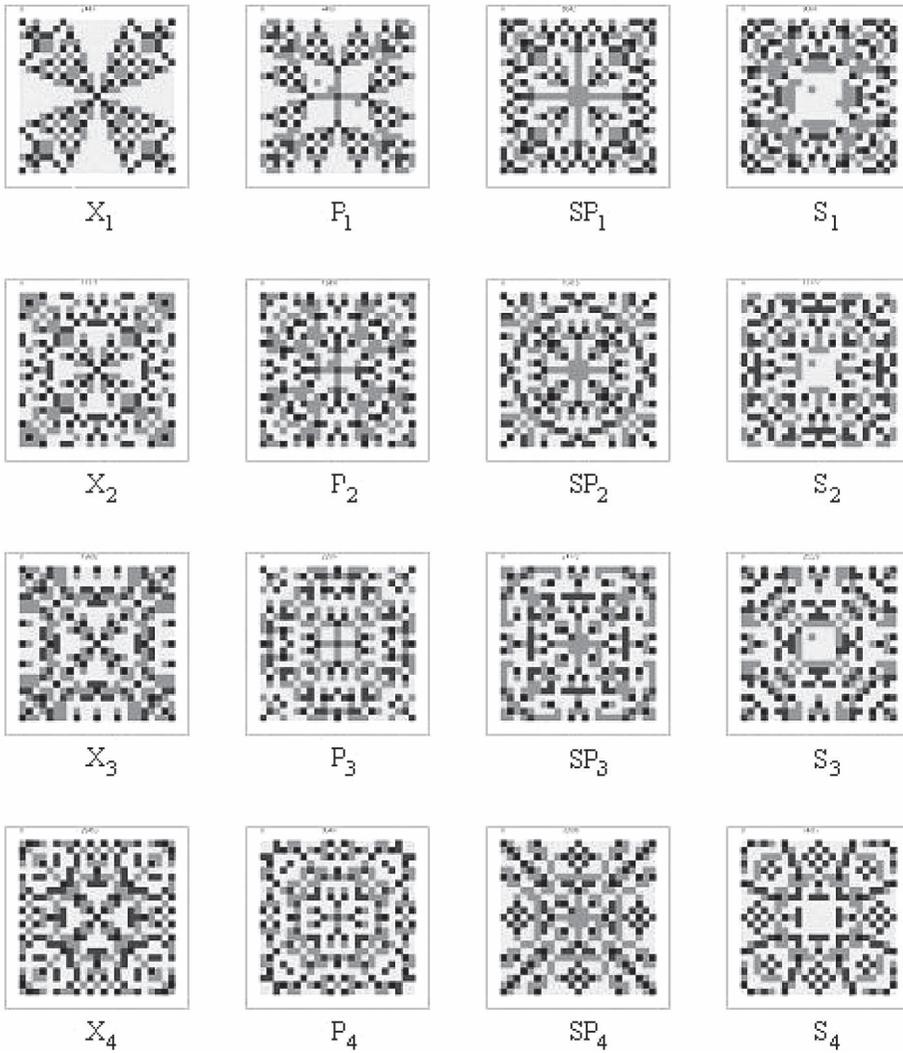


図 5 最初の 16 個の CGN。時間順序は $X_1 \rightarrow P_1 \rightarrow SP_1 \rightarrow S_1 \rightarrow X_2 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots$ である。

できる。このとき、エネルギーを粗視化すると、初期状態の記憶は静止期には失われるが活動期には回復するということもできるだろう。

CGN が4つのカテゴリーに分類され、かつそれらカテゴリーの出現順序が決まっているということを‘CGN の擬周期が4である’と表現することができる。オートマトンのサイズが有限であり、またセル状態を決めるエネルギーの刻み幅が有限であることから、系の可能な状態数は大きい有限で、したがって非常に長大な周期を持つことは必然であるが、実際にははるかに短い擬周期が現れるということがここでは重要であろう。この状況は、ロジスティック写像のような離散系がカオスにいたる前に有限周期状態をとることと対応しているように見える。

CGN において近似的な対称性が擬周期的に現れるということは、系が擬周期的に自己組織化して構造を作り上げているということである。すなわち、静止期におけるセル全体へのエネルギー配分は、活動期の一見乱雑な変動の帰結として、空間的にも時間的にも組織的に構造化されながら起きるということである。

図5の状態は単純ではない。それらが十分‘複雑’であるかどうかは、複雑構造の自己組織化の観点から興味深い問題である。ここでは次の量を計算することで、この問いに対する答を探すことにする：

$$C = \sum_{\{S,S'\}} p(S,S') \log \frac{p(S,S')}{p(S)p(S')} = - \sum_{\{S,S'\}} p(S) \log p(S) + \sum_{\{S,S'\}} p(S|S') p(S') \log p(S|S') \quad (4)$$

$p(S)$ はあるセルが状態 S とする確率、 $p(S,S')$ はあるセルで S' となりかつ別のセルで S となる結合確率、 $p(S|S')$ はあるセルで S' であるときに別のセルが S とである条件付き確率である。ここで、状態 S と S' として時間的に隣り合うものの状態を取れば、 C は相互情報となる (Nicolis JS 1991, Günther et al. 1992, Günther et al. 1994)。

セルを、そのエネルギー E が $i \leq E < i+1$ ($i = 0, 1, 2, 3$) または $4 \leq E$ であるかどうかによって数 i または 4 でラベル付けしよう。そして、格子を行ごとに切り離して行の順に一次的に繋げる。すると、00112342... のような $N=L^2$ 個の数の 1 次元列を得る。われわれは、(4) における状態 S と S' としてこのようにして作った 1 次元セルの隣り合うもの同士のラベルをとることにする。もしもラベルの分布が完全に一定または乱雑であれば C は 0 になる。また、ある構造を持てば正の数になる。 C が大きければ複雑性の程度が大きいと見なす。結果を図2(b) に示す。活動期には C は 0 と有限な値の間をでたらめに振動する。また、静止期には CGN のパターンで決まるある一定値をとるように見える。組織化構造の形成と破壊は活動期の特徴である。とくに、活動期の始めと終わりに C は大きい値をとる傾向がある。

静止期に固定的に見られる自己組織化構造は、活動期において激しい構造化と破壊を激しく繰り返す活動の結果であるといえる。

本論文では、議論を数理的側面に特化することにより、地震の決定論的セルオートマトンモデルは時間的なリズムと空間的構造の双方を同時に生むことで自己組織化を示すことを示した。‘予知’に関連する事柄だけを整理すると次のようになる：

- ・前震活動から巨大本震の発生を正確に予知することはできない。
- ・巨大地震には擬周期性がある。
- ・擬周期の揺らぎ幅程度の誤差範囲で巨大地震の発生を予想することができる。

本文でも触れたように、このようなモデルの特徴を、地震以外の他の自己組織化現象にも結びつけることもできるだろう。関連して多くの興味ある疑問が生じる。なぜ CGN のカテゴリー数一すなわち擬周期一は 4 なのか（ちなみに、 $N=1 \times 1$ では厳密に 1 周期、 $N=1 \times 2$ では 1 周期と 2 周期が現れる）。シミュレーション時間をさらに長く取っても、‘擬周期 4’は変わらないのか。なぜ CGN は厳密なまたは小さく破れた C_{4v} 対称性を持つのか。軌道が CGN へ吸収される吸引域はどのようなものか。擬周期の長さはどのように決まるか。力学に確率を導入すると組織化はどのような変化を見せるか。これらの問題は今後の研究のテーマである。

参考文献

- Bak P and Tang C 1989 *J. Geo. Res.* **94** 15635.
 Burridge R and Knopoff L 1967 *Bul. Seismol. Soc. Am.* **57** 341.
 Dieterich JH 1979 *J. Geo. Res.* **84** 2161.
 Gunther R, Schapiro B and Wagner P 1992 *Int. J. Theor. Phys.* **31** 525
 Gunther R, Schapiro B and Wagner P 1994 *Chaos, Solitons and Fractals* **4** 635.
 Kato N and Hirasawa T 1998 *Bul. Seismol. Soc. Am.* **89** 1401.
 Nicolis JS 1991 *Chaos and Information Processing* (World Scientific) p122.
 Takahashi K 2011 *Faculty of Liberal Arts Review, Tohoku Gakuin Univ.* **160**