

流体力学における変分原理と乱流の平均場理論

——「渦のパラドックス」のその後——

高 橋 光 一

粘性流体に特徴的に見られる乱流は、その複雑性と工学上・応用上の重要性のために多くの研究者の関心を引き付けてきた。直接数値計算法を別にすれば、レイノルズ平均を利用した平均場理論としての渦粘性モデルは最も広く研究されているものであるが、その構成法に一貫した原理は存在しない。本稿では、第 I 部（第 1～5 節）で乱流現象の理解に向けたこれまでの試みを変分原理—最小作用の原理、作用停留の原理とも呼ぶ—の観点から振り返る。特に、理想流体に対するオイラー方程式は変分原理から導かれるが、粘性流体に対するナビエ・ストークス (N-S) 方程式は標準的な変分原理と相容れないことについて復習する。また、この問題を克服するための複素場の方法について概説する。第 II 部（第 6 節以降）では、高橋 (2015a) によって指摘された、「渦のパラドックス」の解決が乱流についての新しい理論をもたらす可能性を詳細に検討する。このアイデアは、速度のみならず粘性係数をも場と見なし、その運動方程式を散逸系に対する変分原理から導くことにより具体化される。このときの力学変数は、複素スカラー場としての粘性係数と複素ベクトル場としての平均速度である。スカラー場は、ベクトル場である速度場を群 $GL(2, C)$ の要素として表現したときにその出現が必然的に要請される。こうして得られた力学系は、その単純さにもかかわらず平行板乱流と円管乱流の実験を見事に再現することが示される。最後に、レイノルズ応力に対応するテンソル場導入の可能性について論じる。

重要語句：粘性流体；ナビエ・ストークス方程式；変分原理；場の反作用；乱流；渦粘性モデル；有効粘性モデル

目次

I 乱流の渦粘性理論と正準変分原理

- 1. はじめに……………121
 - 1.1. 乱流・渦・粘性場……………121

1.2. 壁近傍の乱流の一般的な理解のしかた	123
2. 粘性場と乱流のモデル	129
2.1. レイノルズ方程式	129
2.2. 渦粘性モデル, 特に $k-\varepsilon$ モデル	131
3. 場の作用と反作用	133
4. 粘性の無い流体の変分原理	136
5. 拡散または散逸と変分原理	140
5.1. 決定論的方法	140
5.2. 確率論的方法	141
5.3. 拡散方程式とラグランジュ未定乗数法	142
5.4. 複素場	143
II 変分原理と乱流の平均場理論 [予定]	
6. 非圧縮性 N-S 方程式の変分原理	
7. N-S 方程式と保存量	
8. 複素スカラー行列場の導入	
9. 相互作用の導入と動学的有効粘性モデル	
9.1. 最小相互作用の DEVM (MDEV M)	
9.2. MDEV M における平行板乱流	
9.3. 円管乱流	
9.4. 有効粘性と渦粘性	
9.5. 圧縮性流体への拡張	
10. テンソルの導入とレイノルズ応力	
10.1. 複素ベクトル行列場	
10.2. 平行板乱流	
11. まとめ	
付録 A 粘性係数の分子運動論的説明	
付録 B 円筒座標系における MDEV M 方程式—粘性流体—	
付録 C 平行板乱流における平均速度場の経験式	
付録 D スカラー・ベクトル系の運動方程式— φ, ω がある場合—	
参考文献	

I 乱流の渦粘性理論と正準変分原理

思い川水泡さかまきゆく水のそでのつつみもせきやかかねてん 藤原家隆¹

¹ 丸谷オ一『新々百人一首』(新潮社 1999) p 503.

1. はじめに

1.1. 乱流・渦・粘性場

乱れの諸相を象徴するのに乱流ほど相応しいものはない。乱流は明らかに広い意味でのカオスの一形態であるが、それにしても分からないことが多い。この乱流を観る新しい視点について論じるのが本稿の目的である。そのためには渦を知らなければならない。

川の流れや渦のように場所ごとに速度が変わる流れでは、流体の互いに接する部分部分間に速度変化に応じた力が作用する。遅い部分は速い部分の速度を減じようとし、また、速い部分は遅い部分を引っ張り加速しようとする。この粘性力と呼ばれる力が速度の変化の度合いに比例すると仮定し、流体が従う運動方程式をニュートン力学に基づいて書き下すことができる。このときの比例係数を粘性係数という。今から 170 年ほど前に発見されたこの方程式を、二人の研究者の名をとってナビエ・ストークス (Navier-Stokes, N-S) 方程式と呼び、気体と液体の運動を理解するのに用いられてきた。粘性係数については、付録 A にその分子運動論の導出を与えておく。

N-S 方程式は非線形であるゆえにその内容は極めて豊かである。N-S 方程式は現実の流れをかなりよく再現すると同時に、複雑な現実を数学的に理想化した単純な解も多数生み出すことが知られている (たとえば Drazin & Riley 2006)。点や軸のまわりを回りながら中心に向かったり中心から吹き出すような渦運動もその一種であり、現実の台風や竜巻や渦巻き銀河の数学的モデルとなりうるということが分かっている。N-S 方程式は、最も単純な非線形力学系の一つでありながらその内容の豊富さによって数学研究者の強い関心の対象ともなっている。²

N-S 方程式の数学的に簡単に表すことができる単純渦解としては、バーガース解 (Burgers 1948) とサリバン解 (Sullivan 1959) の二種が知られていた。これらは、渦中心のまわりの速度が中心からの距離とともに変化する様子に違いがある。長らく、自然のモデルとなりうる N-S 方程式の単純渦解としてはこの二つだけが知られていたが、他方、自然界にははるかに多くの種類の渦が存在する。地球の気象現象に限っても、つむじ風、竜巻、温帯低気圧、台風、大気大循環と、形・大きさ・強さは様々である。相転移でもない限り、これらは条件を連続的に変えれば互いに連続的に移り変わるはずのものなのに、方程式の単純渦解はなぜ二種しかないのか、そもそも単純渦解では自然を略記できないのか、これが「渦のパラドッ

² 空間 3 次元で任意の初期値に対し、ただ一つの解が存在するか、存在するときそれは正則か、また初期値に対して連続か、という数学的問題は N-S 方程式に対してはまだ解かれていない。クレイ研究所によって 2000 年に提示されたいわゆる「ミレニアム問題」の一つである。

クス」で (高橋 2015a), N-S 方程式が与える渦解にまつわる謎であった。

「渦のパラドックス」は, バーガース解とサリバン解を連続的につなぐ, あるいはその外部に連続的に拡張される, より一般的な解があることを示すことで解決された (Takahashi 2014a, b; 2015; 高橋 2015b)。そのような一般解を見出すときに指針となったのが渦を支配する方程式の粘性反転不変性である。すなわち, N-S 方程式は 時空反転 $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}, t \rightarrow -t$, $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{f}} \rightarrow -\tilde{\mathbf{f}}$ と動粘性係数 (粘性係数を密度で割ったもの) の符号反転 $\nu \rightarrow -\nu$ のもとでかたちが変わらない。ここで \mathbf{r} は空間座標, t は時間, \mathbf{u} は速度, $\tilde{\mathbf{f}} \equiv \mathbf{f} - \nabla p / \rho$ は単位質量あたりの流体要素に作用する外力 (圧力勾配を含む) である。また, 定常運動を支配する方程式では, 変換 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{f}} \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}$ と符号反転 $\nu \rightarrow -\nu$ を組み合わせた変換のもとでの不変性が存在する。実際, Oseen (1911) の動的渦解

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-r^2/4\nu t}\right)$$

で上記の粘性反転をすると, 過去に遡るほど渦が減衰する解が得られる。粘性反転不変性を, N-S 方程式の解を探すに際しどのように用いるかについては Takahashi (2014b) を参照されたい。

N-S 方程式では, 動粘性係数の符号は正である。これによって, 流体は運動の変化のより少ない状態へ, 場所場所によるエネルギーの変動のより小さい状態へと向かって移り変わる傾向が生まれる。大きな渦はより小さな渦への分裂を繰り返して物理的に可能な最小渦に達し, 最小渦が消滅して渦のエネルギーは熱化する。これに伴い, エネルギーは系内に広く散逸する。これは, 流体の運動に限ったときの熱統計学第 2 法則—エントロピー増大則—の表現と見ることができる。

動粘性係数が負の力学では, これとは逆の現象が起きる。すなわち, 局所的に運動の差違は大きくなりエネルギーは局所へと集積する。すなわち, 熱統計学第 2 法則とは一見逆の過程が進行する。これはあり得ないことであろうか。

このような一様から構造化への変化は, 流体の中で頻繁に起きている。壁に沿っての流れは, 全体的な流れの速が大きくなると壁付近で必ず乱れを生じる。障害物のために激みができる場合も同じである。流れの変化が大きい場所をよく見ると大小の渦がつくられ, 流れに不規則な振動が生まれている。局所的な構造化—低エントロピー化—が起きるのである。ただし, 運動エネルギーの一部は熱となって系全体にあるいは環境に散逸しているので, 広く見れば熱統計学第 2 法則に矛盾しない (ハズである)。このような現象が乱流である。局所構造に関しては, 一様状態から渦がつくられる現象を動粘性係数が負の力学が表現していると考えることができる。この見方が当を得ているとすれば, 渦の生成消滅の程度は場所に

よって異なるから、動粘性係数も場所によってあるいは時間によって異なるとするほうが流れをより正しくとらえることに繋がるであろう。すなわち、動粘性係数を力学的場と見なして流体の力学を再構成することが有効であろうという考えに至る（高橋 2015a）。ここで「力学的場」で意味することは、複数の独立な場がニュートン力学（Newtonian mechanics）での作用反作用の法則に従いながら相互作用を及ぼし合う、ということである。作用反作用と粘性が共に運動量の交換によることから、これはごく自然な発想と思われる。

従来、時空間に依存する動粘性係数として渦粘性場を導入する渦粘性モデル（総説として木田・柳瀬 1999；Bredberg 2001；Davidson 2015 などがある。）が広く取り扱われてきた。これは場の変動成分のレイノルズ平均を取った方程式系を閉じさせるために統計量に関するいくつかの仮定を設定して構成される。統計量に関する仮定であるために、力学法則—作用反作用の法則＝運動量保存則—と相容れなくなる危険が常に内在する。これを回避するために、本稿でわれわれは乱流場の理論が厳密な変分原理に基づいて構成されることを要求する。そのような理論を動力学的有効粘性モデル Dynamical Effective Viscosity Model (DEVM) と呼ぶことにする。

1.2. 壁近傍の乱流の一般的な理解のしかた

初めに、渦が渦を生むというリチャードソン—コルモゴロフ描像に基づく乱流の一般的な考え方を復習しておく。流速が場所ごとに変化する、すなわち速度勾配が存在することが重要である。

静止した壁がある場合を考えよう。壁に接した流体部分の速度は0とするのが普通である。厳密に0になるかについては議論があるが、実験、シミュレーションによるこれまでの研究では速度は0として実際上の問題は無いようである（脚注6を参照）。乱流は大きい速度勾配があることで生まれる。壁上では流速は0なので壁近傍で必ず速度勾配が存在し、これが有限の渦度

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}$$

を生むことの原因である。さらに流速あるいはレイノルズ数がある値—これは壁面の粗さに依存する—を超えれば乱流が生まれると考えられている。

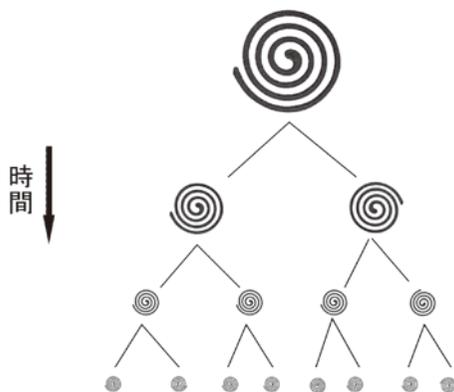


図 1. 渦のカスケード。矢印はエネルギーが配分される向きをも表す。

乱流を、大きな渦が段階的に小さな渦に分岐的に壊れていく非線形過程—渦の多重分割 = カスケード—と捉える (図 1)。たまたま流れの中に生じた微小振動は成長増大するという性質があり—ケルビン・ヘルムホルツ不安定—、これがこのような渦カスケードのきっかけとなる。さらに、渦の大きさはだんだん小さくなるが、小ささの限界があるとする。一般的には、途中のカスケードではエネルギーはほぼ渦運動中に保存され、最小渦に達したときに、それは直ちに消滅して渦の運動エネルギーは散逸すると考える。このようなエネルギー伝達の機構は、イギリスの数学者で気象学者のリチャードソンが 1920 年代に提唱した。

大きな渦から小さな渦が形成されるメカニズムは、当然ながら N-S 方程式に潜んでいる。このことは渦度 $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ を通して直感的に理解できる。N-S 方程式から導かれる渦度の式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega + \nabla \times \tilde{\mathbf{f}}$$

である。左辺は移流の割合を表す。右辺第 1 項は渦度と速度勾配の相互作用、第 2 項は散逸による減衰、第 3 項は外力からの寄与である。左辺第 2 項と右辺第 1 項が非線形で、図 1 に描いた渦の多重分割を生じさせる。話を単純化すると、これらの作用は運動エネルギーを散逸させず次々と渦の微小ステージに受け渡す。最後に、渦があるところまで小さくなったとき粘性項の影響が効果的に及んで渦が消滅—運動エネルギーが熱エネルギーに転換—すると見なす。ノイマン (von Neumann 1963) はこうした事情を次のように総括した：

乱流とは、一定量のエネルギーのエルゴード的分配ではなく、フーリエ変換の空間において低波数から高波数へ一定量のエネルギーが輸送される現象である。

このような描像から直ちに次のことが言える。

初めに1個の大きさ L 、典型的な速度 U の渦があって、カスケードの結果大きさ ℓ 、典型的な速度 v の n 個の渦になり消滅したとする。初めの渦エネルギーは $L^3\rho U^2$ でこれが典型的な時間 L/U の間に図1の次世代渦に引き継がれる。単位時間に世代間を移動するエネルギーは

$$E_g = \rho L^2 U^3$$

である。途中エネルギー散逸が無視できるとしているため、最終世代の n 個の渦に対しては

$$E_g = n\rho\ell^2 v^3$$

と表すことができるはずである。これらの式より

$$L^2 U^3 = n\ell^2 v^3$$

を得る。レイノルズ数 $Re = LU/v$ を用いると

$$Re^3 = \frac{nL(\ell v)^3}{\ell v^3}$$

である。最終世代の渦の消滅時には散逸項が大きくなり渦度方程式の非線形項と同程度の寄与をしているはずなのでおおむね

$$\frac{v}{\ell} = v \frac{1}{\ell^2}$$

と見てよいだろう。最終世代の渦ではそのレイノルズ数は1のオーダーということである。よって

$$Re^3 = \frac{nL}{\ell}$$

である。最終世代渦が d 次元の大きさ L の空間に納まっていると仮定すると

$$L^d = An\ell^d$$

が成り立つ。 A はオーダー1の数である。これを上のレイノルズ数の式に代入すると A を1として

$$n = Re^{3/(1+1/d)}, \quad \frac{\ell}{L} = Re^{-3/(1+d)}$$

である。レイノルズ数が大きくなると n は大きくなる。 $d=2$ のとき、 $Re=1,000$ では最小渦の大きさは1,000分の1にまで小さくなる。レイノルズ数の増大と共に渦が微小化する実験の様子は Davidson (2015) の第1章に図示されている。

渦カスケードの力学的メカニズムをもう少し詳しく見てみよう。外力がスカラーの発散で与えられるとして、渦度方程式右辺の第 3 項を無視したヘルムホルツ方程式を考える。この場合、初めに渦度がいたるところ 0 だとその後渦度はずっと 0 である（ヘルムホルツの第 1 渦定理）ので、ここでは初めに渦度が 0 でない流れ

$$\mathbf{u}_{ini} = (u_{ini,x}(z), 0, 0)$$

があったとする。壁は $z=0$ にあり $u_{ini,x}(0)=0$, $u'_{ini,x}(0)>0$ とする（図 2）。このときの渦度の成分は $\omega_{ini,y} = \partial_z u_{ini,x} > 0$ なので、微小変動 $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{ini}$ と $\delta \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \delta \mathbf{u}$ については、平均として

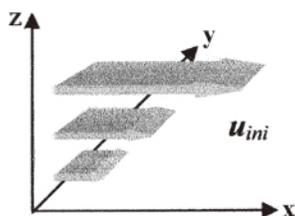


図 2. x - y 面に平行な流れ。流速は面からの距離に比例する。渦度は y 軸の正の向き。

$$\delta \dot{\boldsymbol{\omega}} = \omega_{ini,y} \partial_y \delta \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \delta \boldsymbol{\omega}$$

としてよいだろう。初めの状態からの乱れが乱雑に起きる場合、 $\partial_y \delta u_x$ と $\partial_y \delta u_z$ は平均値 0 のまわりに揺らぐだろう。しかし、壁近傍では $\partial_y \delta u_y$ は常に正である（図 3）。

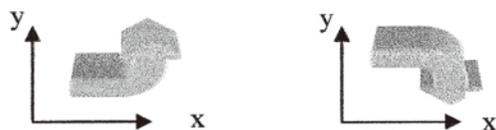


図 3. 揺らぎ δu_y の 2 つのパターン。初めに $u_y = 0$ だったので、いずれの場合も乱れの発生場所の近くでは $\partial_y \delta u_y > 0$ である。

したがって、右辺第 1 項により $\delta \omega_y$ の時間変化は正で ω_y は増加するだろう（図 4）。これに対し、右辺第 2 項は減少させる作用をする。レイノルズ数が大きいとき、第 2 項の寄与は非線形項に対し相対的に小さいとしてよいだろう。小さな渦へのエネルギー伝達がエネルギー損失無しに行われるという基本仮定の根拠がここにある³。

³ この基本仮定はもちろん話を単純化するためのものである。実際は、渦の相互のあるいは内部の運動にともなうエネルギーは粘性のために散逸する。渦内部に励起される振動の減衰については、例えば Pradeep & Hussain (2000), Williamson et al. (2000) に、それぞれ理論的および実験的な報告がある。

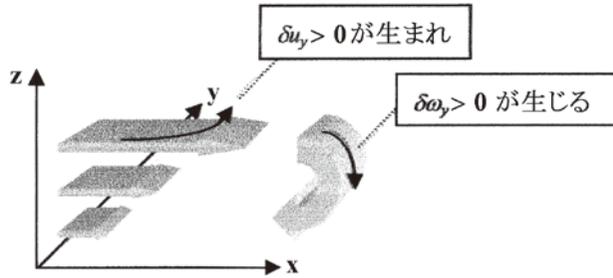


図4. 速度の揺らぎと渦度の揺らぎの相関。

また、流体の微小部分からの速度への寄与はビオサバール則

$$\delta du(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'$$

で与えられるので、流速は y 軸の正の方向に対して時計回りの成分を持つようになる。新しい流れに沿って同様のことが繰り返し起きると、大きな渦のエネルギーが小さな多数の渦に分配される渦のカスケードが起き、最小エネルギーの渦は粘性によりエネルギーを散逸させ消滅する (図5)。

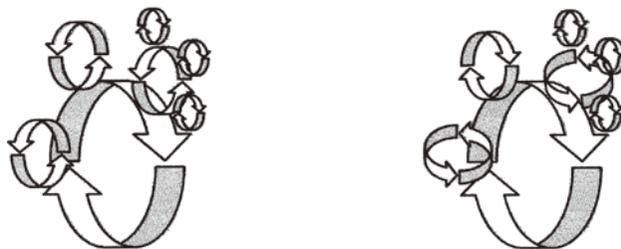


図5. 大きい渦から小さな渦への分岐過程 (カスケード)。

乱流の特徴は、上記のような大きなスケールの渦から小さなスケールの渦へのエネルギーの流れと散逸である。そのパターンに普遍性があるかどうかは、乱流研究における重要な問題であり、コルモゴロフ (Kolmogorov 1991 ; 1961) とハイゼンベルク (Heisenberg 1948) は、この分野の初期の開拓で大きな寄与をした。これらについては、von Neumann (1963) に初期のまとまったレビューがある。おおよその考え方は次の通りである。

一様乱流において、短すぎず長すぎない中間波長領域でエネルギーの伝達に直接関わる量は、位置 \mathbf{r} と $\mathbf{r} + \Delta$ での速度の2乗差

$$B_1(\Delta) = \overline{u(\mathbf{r} + \Delta)^2 - u(\mathbf{r})^2}, \quad B_2(\Delta) = \overline{[u(\mathbf{r} + \Delta) - u(\mathbf{r})]^2}$$

のようなものであろう。これらがエネルギーの流れ率 ε と距離 Δ のみに依存すると仮定すると、次元解析をすると、 $[B_i] = L^2 T^{-2}$, $[\varepsilon] = L^2 T^{-3}$, $[\Delta] = L$ であるから両辺の次元を比較して

$$B_i \sim \varepsilon^{2/3} \Delta^{2/3} \quad (\text{コルモゴロフの } 2/3 \text{ 乗則})$$

が可能な関係である。したがって 1 次元フーリエ変換後の波数依存性は

$$\tilde{B}_i \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (\text{コルモゴロフの } -5/3 \text{ 乗則})$$

となる。

乱流を特徴づけるレイノルズ応力は工学的にも重要な量で、第 2 節で述べるようにこれを見積もるためにさまざまな渦粘性モデルが考えられた。このときの鍵となる概念が渦粘性 ν_t であって、2.1 で述べるブシネスクの仮説を通して便宜的に定義された。N-S 方程式に現れる動粘性係数は流体を構成する分子の混合の効果を表すものであり特に分子粘性と呼ばれる。これに対し、乱流を構成する渦の混合によって新たな粘性効果が生まれると考え、それを渦粘性と呼ぶのである。この渦粘性をどのように定量化するかが乱流力学の課題の一つである。乱流の基本理論が見つからないので、渦粘性の定量化に際してはいくつかの仮定を立てて平均流の方程式を書き下すのが慣例である。こうして得られる方程式系を渦粘性モデルという。

流速の壁に垂直な方向の変化率を $\partial \bar{u}_x / \partial z$ とし、 z 方向にある距離 l 程度離れると壁方向にも壁に垂直の方向にも同じ程度の乱れが生まれ ($\delta u_x \approx \delta u_z$: 乱れの等方性の仮定)、混合のためにもとの流れの情報が失われるという状況を考える。このとき $|\delta u_x| \approx |\delta u_z| \approx |\partial \bar{u}_x / \partial z| l$ だから、ブシネスクの仮説 $|R_{13}| \equiv \overline{|\delta u_x \delta u_z|} = \nu_t |\partial \bar{u}_x / \partial z|$ より

$$\nu_t \approx |\partial \bar{u}_x / \partial z| l^2$$

となる (プラントルの混合距離理論, Prandtl 1933)。 l を混合距離という。壁からの距離 z の空間に特徴的な長さの次元を持った量は z そのものであるから、定数 κ を $O(1)$ の無次元量として

$$l = \kappa z$$

とおいてよからうというのがプラントルの仮説である。レイノルズ方程式のレイノルズ応力項に上記の仮定を入れて解くと、壁から少し離れたところで

$$\bar{u}_x \sim \frac{1}{\kappa} \ln \hat{z} + \text{定数}$$

となることを示すことができる(流れの方向に一様な外力または一様な圧力勾配を仮定する。例えば木田・柳瀬(1999)を参照のこと)。壁付近と中央付近の流れの特徴をそれぞれ別個に捉えた速度分布式が間で滑らかに接続することを要求して対数分布を導くこともできる(Izakson 1937; Milikan 1939)。 κ は多くの乱流で同じ値をとるように見え、カルマン‘普遍’定数と呼ばれる。

\bar{u}_x が対数的に振る舞う領域を対数領域という。この領域は、さらに壁に近いところで \bar{u}_x が z について線形に振る舞う領域と連続的につながる。結果的に、この接続が対数関数の壁に向かっての単なる延長よりも急激な減少というかたちで起きる—すなわち混合距離が壁に向かって急に小さくなる。実験は、まさにこのことを明らかにしている(Laufer 1951; Wei & Willmarth 1989; Zanoun et al. 2004; Dean 1978)。乱流理論はこの速度分布を説明できなければならない。これまでは、この分布を基本原理から純理論的に導くことは難しく、第2節で概説する $k-\varepsilon$ モデルのような渦粘性モデルでは接続のための調整関数—ふつう減衰関数という—(Van Driest 1956)の現象論的な導入がしばしばなされてきた。ある特定の境界条件の下での流れを精密に記述するためにはこれでもよいが、異なる境界条件—壁の粗さや形状が異なる—のもとでどうすればよいのかは分からない。壁近傍の乱流現象の説明は、色々な仮説の組み合わせでなされているのが現状である。

乱流は、現実の液体や気体と物体が相対運動するときには必ず起きる現象である。何らかの物理的不均—速度や温度などの変化—が大きくなったとき、それを自発的に解消する方向に系が変化する際に乱流がつくられる。乱流の正体は大小の渦の一見不規則な生成と消滅であり、必ず流速や圧力の制御しがたい振動を伴う。これはエネルギーの損失に繋がる。さらに、構造物はそのために劣化することもある。かくして、乱流の理解は理論上のみならず実用上の重要な研究テーマとなる。

2. 粘性場と乱流のモデル

2.1. レイノルズ方程式

流体の運動は、流体の速度場 \mathbf{u} に対する次の N-S 方程式で表される：

$$D_t \mathbf{u} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$

$D_t \mathbf{u}$ は \mathbf{u} のラグランジュ微分 (Lagrange derivative, 実質微分 substantial derivative, 物質微分 material derivative という呼称もある), 右辺の ν は動粘性係数, ρ は密度, $\rho \mathbf{f}$ は単位体

積あたりの流体に作用する体積力である。N-S 方程式で動粘性係数が無いものをオイラー (Euler) 方程式と呼ぶ。右辺第 1 項が粘性によるエネルギー散逸を引き起こす。これは、左辺第 2 項の移流項と相まって乱流という複雑な流れを生み出す原因となる。最近では、N-S 方程式を数値的に解く手法が発達して、色々な境界条件の下での乱流の性質を分かりやすく可視化できるようになった。

数値計算ができることが物理的な理解に直接つながるわけではない。もしも乱流の特性を捉えた物理量間の関係を与えるモデルがあれば、それを解くことで生起している物理的過程をより容易に把握できる。これに関しては、粘性に相当する量を場のように扱う方法があつて、実は上に述べた渦粘性モデルとしてよく知られ、乱流の研究に、特に工学の領域で用いられてきた。渦粘性モデルでは、実際の流れを、なんらかの平均化—例えば集団平均や定常的乱流に対しては時間平均—で得られる単純な平均流とその周りの小さな乱れの和として表す。乱れの平均は 0 である。N-S 方程式の中の速度場をそのような和で置き換えて、全体の平均を取ると乱れの 1 次の項は仮定より 0 となるので、平均場と乱れの 2 次の項の平均—2 次モーメント、あるいはレイノルズ (Reynolds) 応力ともいう—についての式が得られる。これがレイノルズ平均化された (Reynolds averaged) N-S 方程式または単にレイノルズ (平均) 方程式と呼ばれるものである。乱れの 2 次平均が分かれば平均場が分かるということである。速度と圧力を

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = (\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3)$$

$$p = \bar{p} + \pi$$

のように平均量とそこからの変動に分けて、これを N-S 方程式に代入し平均する。変動については平均はゼロ、すなわち $\bar{\mathbf{v}} = 0$, $\bar{\pi} = 0$, 非圧縮流体であるから変動流の発散も 0, を使うと (\mathbf{f} は一定とする) 2 次モーメント

$$R_{ij} = \overline{\delta u_i \delta u_j}$$

を含む

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\overline{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \frac{\nabla \bar{p}}{\rho} + \mathbf{f}$$

という式—レイノルズ方程式—を得る。左辺が加速度、右辺が力である。ドットは時間に関する偏微分 ∂_t を表す。ちなみに、 $-\rho R_{ij}$ あるいは $-R_{ij}$ をレイノルズ応力という。これと元のレイノルズ方程式から、変動流に関する式も次のように書くことができる：

$$\dot{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \overline{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla \pi}{\rho}$$

乱れの2次平均を支配する式は, 上記のN-S方程式に乱れ場をかけて平均を取ればよいが, そこには乱れの3次平均—3次モーメント—が現れる。具体的には, \mathbf{v} を掛けて平均をとると

$$\overline{\delta u_i \dot{\mathbf{v}}} + \overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\delta u_i \nabla \mathbf{v}} + \overline{\delta u_i \mathbf{v}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}} = -\overline{\delta u_i \mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \overline{\delta u_i \nabla^2 \mathbf{v}} - \frac{\overline{\delta u_i \nabla \pi}}{\rho}$$

という式を得る。(成分を入れ替えたものを加えて, 成分について対称化したものがレイノルズ方程式である。10.2節を参照。) これを繰り返せば, 乱れの高次平均に関する無限個の式が得られる。もちろん, この無限個の式をまとめて解くことは一般にはできない。しかし, 高次のモーメントを低次のモーメントで表すことができれば, そしてその次数の式でモーメントの計算を打ち切ることができれば, 式の数をも有限個に閉じさせることができる。実際にこのようないまことが起きることは無いので, 便宜的に高次モーメントを低次モーメントで表す近似を用いて, 式を人為的に閉じさせてしまう。有名なものにブシネスク近似

$$-R_{ij} \equiv -\overline{\delta u_i \delta u_j} = \nu_i \bar{e}_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

$$\bar{e}_{ij} \equiv \partial_i \bar{u}_j + \partial_j \bar{u}_i$$

$$k \equiv \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}^2}$$

がある (Boussinesq 1877; 木田・柳瀬 1999)。このとき, 各モーメントを独立した場として扱う。このような考え方によるモデルが渦粘性モデルである。

2.2. 渦粘性モデル, 特に $k-\varepsilon$ モデル

高次モーメントに対する仮定, 高次モーメントのレイノルズ方程式に現れる項の軽重の見積りのしかたなどによって様々な渦粘性モデルをつくることができる。例えば渦の運動エネルギー k , エネルギー散逸の割合 ε , 壁近くでの流れの変化の範囲を表す長さ l などを用いるモデルは $k-\varepsilon$, $k-l$ モデルと名付けられる。他に $k-\tau$, $k-\omega$ モデル (Bredberg 2001) などがある。ここでは $k-\varepsilon$ モデルの概略を述べる。示唆に富む平易かつ批判的な解説としては Davidson (2015) の第4章を参照されたい。

$k-\varepsilon$ モデルでは, 平均流速 $\bar{\mathbf{u}}$, 変動流の平均エネルギー

$$k = R_{ii} / 2$$

と変動流によるエネルギー散逸率

$$\varepsilon = \nu \overline{(\partial \delta u_i / \partial x_j)^2}$$

を基本的物理量とする。これらの量に関する輸送方程式を、レイノルズ方程式をもとにするのであるが、その際、3 次モーメントを 2 次モーメントの組み合わせで近似的に表し、さらに、系の等方性を仮定してブシネスク近似を行い、さらに直交する方向の乱れに相関は無いとしてエネルギー散逸テンソルを

$$2\nu \overline{\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_k}} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$$

のように近似してしまう。すると、 $\bar{\mathbf{u}}$ と k および ε についての閉じた方程式系が得られる。参考のために、木田・柳瀬 (1999) で作られた単純なモデルを採録すると

$$\begin{aligned} (\partial_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) k &= \frac{1}{2} \nu_T \bar{e}_{ij}^2 + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} + \nu \right) \nabla k \right\} - \varepsilon \\ (\partial_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \varepsilon &= \frac{1}{2} C_{\varepsilon 1} C_{\mu} k \bar{e}_{ij}^2 + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\nu_T}{\sigma_{\varepsilon}} + \nu \right) \nabla \varepsilon \right\} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned}$$

となる。 C_{μ} , σ_k 等は定数である。

$$\nu_T = C_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon}$$

は渦粘性と名付けられているもので、生成する渦による粘性効果を表す量と考える。 ν_T には時空依存性があるので、我々の視点からは粘性場と呼ばれるべきものである。

レイノルズ方程式が力と運動量の関係を表すことの類比で、上の 2 式は、右辺で与えられる‘力’と場 k , ε に生じる変化との関係を表しているといえる。レイノルズ方程式の他に二つの輸送方程式を用いる 2 方程式渦粘性モデルの一種である (Bredberg 2001)。

どのような近似を用いるかでさまざまな k - ε モデルが構成される (Nagano & Tagawa 1990 ; Suga 1998 ; Karimpour & Venayagamoorthy 2013)。このモデルを、一様乱流のみならず加速流 (ロケットノズル付近で実現する。加速が大きいと乱流から層流への転移が起きる点で興味深い) にも適用する試みもある (Jones & Launder 1972)。 k と ε 以外の量もモデル構築に用いることができるし、輸送方程式の数をさらに増やすことも考えられる。例えば、Yoshizawa ら (Yoshizawa et al. 2012) は k と ε に加え、渦粘性場の輸送方程式を導入する方法を提唱している。より詳しくは、Bailly & Comte-Bellot (2015), 木田・柳瀬 (1999) の教科書, Bredberg (2001) の報告を参照されたい。

上に見たような、 k - ε モデルに代表される渦粘性モデルの任意性を極力無くす努力もなされている。Yoshizawa ら (Yoshizawa 1984 ; Yokoi & Yoshizawa 1993 ; Okamoto 1994 ; Yoshizawa et al. 2012 ; Yokoi & Brandenburg 2016) は、物理量を長波長モードと短波長モードに分けるためのパラメータ δ を導入し、平均流成分と乱流成分をそれぞれ長波長モードと短波

長モードで表して δ に関する級数展開の展開係数の方程式を順次解いていく方法を提唱している。その場合でも、有限の δ の中で展開を打ち切りモデル化を行わなければならない。

一般に、渦粘性モデルは本来は無限個ある方程式を有限個に（無理に）減らした方程式からなるので、それらが力学的に辻褓が合っているという保証は必ずしも無い。これは**完結性の問題**といわれるもので、状況によっては数値計算をするといろいろな不都合をもたらす原因となる。

次節では、細かい計算以前の、より原理的な**作用-反作用の問題**について考える。

3. 場の作用と反作用

質量のある物体 A に力が働いていると物体に加速度が生じるが、ニュートン力学の運動法則によればこのとき

$$\text{質量}_A \times \text{加速度}_A = \text{力}_A \quad \text{【運動法則】}$$

の関係がある。物体 B についても同様である。作用反作用の法則は、二つの物体 A, B が力を及ぼし合っているときは、それぞれに作用する力、すなわち力 A と力 B は大きさが同じで向きが反対であると主張する。すなわち

$$\text{力}_A = -\text{力}_B \quad \text{【作用反作用の法則】}$$

ニュートン力学の骨格を成すこの二つの法則から、物体 A と B の運動には密接な関連が生まれることになる。力 A と力 B が非常に複雑なものであるからといって、計算上の都合で力 A と力 B の簡略化のしかたを違えてしまうと、作用反作用の法則を破ってしまうことになり、場合によっては全く非現実的な結果をもたらすことになりかねない。

場についても話は同じである。孤立した二つの場が影響し合って変化するとき、やはり作用反作用の法則に従わなければならない。これは、ニュートン力学に基づく限り絶対的な要請であって、それぞれの場の運動について簡単化の近似をかってに行うことは本来許されないことである。流体力学の渦粘性モデルでは一般にこの原則が破られていると考えられる事情がある（木田・柳瀬 1999）。

場の相互作用においても作用反作用の法則が維持されるためにはどうすればよいのかを考えるために、作用反作用の法則の起源について復習してみよう。物体 A の運動方程式は

$$\text{運動量}_A \text{の時間変化の割合} = \text{力}_A$$

と書くことができる。運動量とは速度に質量を掛けたものである。これと作用反作用の法則、すなわち力 $A = -\text{力}_B$ を組み合わせると、力を及ぼし合っている物体 A と B について

(運動量_A + 運動量_B) の時間変化の割合 = 0

が成り立つ。すなわち、

全運動量は時間変化せず一定である

という運動量保存則を得る。これが作用反作用の法則の物理的な中身である。運動の乱雑性によるエネルギー散逸がある場合でも、それによる運動量運搬は乱雑性の故にゼロなので、この事情は変わらない。

相互作用する場の方程式においても作用反作用の法則が成り立つためにはどうすればよいのか。場についても作用と反作用が自動的に取り込まれるか、あるいは運動量が常に自動的に保存するように理論を構成すればよい。それは、方程式を並進対称性を保ちながら変分原理によって導くことができるように理論形式を整えておけば可能なのである。変分原理—または最小作用の原理、またはハミルトンの原理—とは次のことをいう。

1. 時空間的に変化する変数 φ について運動エネルギー密度とポテンシャルエネルギー密度を求める。
2. 運動エネルギー密度からポテンシャルエネルギー密度を引いたもの—ラグランジュアン密度—を時間空間の適当な領域にわたり積分して作用 (Action)⁴ を求める。
3. φ の任意の微小な変化に対し Action が停留値をとるようにすると φ の運動方程式が決まる。

つまり、 φ は Action という量が停留値—最大あるいは最小値とは限らない—をとるように自分の運動経路を決める、ということである。光学では、2 点を結ぶ光の経路はその経路を進むのに要する時間を最小または最大にしたものである、というフェルマーの法則が知られているが、これも一種の最小作用の原理の現れである。物理学は、古典力学、量子論、相対性理論のすべてにわたって最小作用の原理に基づいて整備・構築され、顕著な成果をあげている。この意味で、普遍的な最小作用の原理の発見は物理学史上最も重要な出来事の一つであった⁵。

⁴ ここでの‘作用’は‘作用反作用の法則’の‘作用’とは意味が異なることに注意。物理学でこのようなまぎらわしい定義が用いられるのは珍しい。以後、ラグランジュアン密度の時間空間積分を Action と書くことにする。

⁵ この原理のもとになるアイデアは、現実にはあり得ない状態や起こりえない運動を想定するというものである。その起源は、歴史家の研究によれば古代ギリシャのアルキメデスや中世ヨーロッパのヨルダヌスにまで遡るが、近代の形式を完成させるにあたっては、17 世紀のフェルマー、モーペルチュール、ライプニッツ、オイラー、18 世紀以降のハミルトン、ラグランジュらの洞察に負うところが大きい。しかし、確立するまでの過程には、ニュートン・デカルトという時代の権威からの拘束、‘自

場の力学についても、Action を構成し最小作用の原理を適用することで、運動量の保存その他の物理的要請を満たす理論をつくることができる。複数の場があるとき、それらの運動方程式は密接な関連を持つことになる。簡単な例を挙げよう。

【例 1】 2 種類の場 $\varphi_1(t, \mathbf{r})$, $\varphi_2(t, \mathbf{r})$ があって次のような運動方程式に従うとしよう：

$$\partial_t^2 \varphi_1 - \nabla^2 \varphi_1 = \varphi_2$$

$$\partial_t^2 \varphi_2 - \nabla^2 \varphi_2 = a \varphi_1$$

a は定数とする。 φ_1 に生じる‘加速度’は φ_2 という‘力’によることを第 1 の式は表している。同様に、 φ_2 に生じる‘加速度’は $a \varphi_1$ という‘力’によることを第 2 の式は表している。方程式だけを見れば a の値は数学的には何でもよいのであるが、 $0 \leq t \leq \infty$ で有界の φ_1 と φ_2 が相互に作用と反作用を及ぼし合うことを要請すると $a=0$ は許されない。このことを Action のことばで言い直すと、非自明な Action は $a \neq 0$ のときだけ存在して、それは

$$\int \left(\frac{a}{2} (\dot{\varphi}_1^2 - (\nabla \varphi_1)^2) + \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_2^2 - (\nabla \varphi_2)^2) + a \varphi_1 \varphi_2 \right) d\mathbf{r} dt$$

である、ということになる。

上の事情を次のように述べることもできる。 φ_1 と φ_2 を \mathbf{r}, t についてフーリエ分解したときの波数ベクトルと角周波数について、その総和がゼロのものだけの相互作用が許される。波数ベクトルを運動量ベクトルと対応させれば運動量保存が成り立ち、 φ_1 と φ_2 の間に運動の第 3 法則の意味で作用反作用の法則が成立している。並進対称性を持ち φ_1, φ_2 およびそれらの微分について正則な Action が存在して初めてこのようなことが保証されるのである。このような系を力学的に閉じていると呼ぶことにする。

作用反作用の法則を無視しても、実質的な問題は生じない場合がある。上の連立微分方程式の例では、 $a=0$ の場合を、地球重力場の中での音波の伝播のように、外部場 φ_2 の中での弱い場 φ_1 の運動を表すと考えることができる。他には、パッシブスカラー理論がある。これは、流体の運動に一方的に影響されて拡散するスカラー量を

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \kappa \Delta \phi$$

という方程式で表し、N-S 方程式はそのままにして \mathbf{u} と ϕ の運動を記述しようというものである。 ϕ は \mathbf{u} の影響下で運動するが \mathbf{u} には影響を与えないという意味で‘パッシブ(受け身)’

然の目的’や‘創造者の智’のような形而上の価値判断が入り込む余地、事実誤認、先取権の争いなどがあり、話は単純ではない。変分原理が徹底して形而下の問題となったのはオイラー以降である。これについては、例えば Dugas (1988) を参照されたい。物理学内の網羅的総括的な扱いは Yourgraw & Mandelstram (1968) に見られる。

である。流体の温度や十分低密度の極小粒子群の変化はこの理論で記述されると考えられる。1次元のバーガスモデル (Burgers 1948) と連立させたときの解については良く知られているのであるが、2次元以上では解の挙動は一般に非常に複雑になる (木田・柳瀬 1999; Warhaft 2000; Dharmarathne et al. 2015)。さらに困ったことには、流体と ϕ との間に運動量の交換がある場合は、 ϕ から \mathbf{u} への反作用も考えなければならず、上記の方程式では不十分である。このことを、N-S 方程式とパッシブスカラーの式を変分原理によって同時に与えるような Action は存在しない、と言い換えることができる。次のような例がこの事情を明らかにしてくれる。

【例 2】 時間だけの関数 φ_1, φ_2 の数学的に閉じた系

$$\partial_t^2 \varphi_1 = \varphi_2, \quad \partial_t^2 \varphi_2 = \varphi_1 \varphi_2$$

は力学的に閉じた系ではない。 φ_1 と φ_2 間の‘運動量’保存を保証する正則な Action が存在しないからである。上式から φ_2 を消去した

$$\partial_t^4 \varphi_1 = \varphi_1 \partial_t^2 \varphi_1$$

を見ればこのことは明らかであろう。しかし、補助場 λ, η を用いて

$$\int (\lambda(\ddot{\varphi}_1 - \varphi_2) + \eta(\ddot{\varphi}_2 - \varphi_1 \varphi_2)) dt$$

という正則な‘Action’をつくることができる。補助場が、‘運動量’の不釣り合いを是正する自由度となっているのである。上記の積分量は正準的エネルギーとは無関係なので、ここでは‘Action’と引用符を用いた。

前節で述べた k - ε モデルでも上記の意味での正準 Acton をつくることは不可能なことは容易に予想できる。加えて、方程式の右辺を‘力’と見なしたとき、 $\mathbf{u}, k, \varepsilon$ に作用する‘力’は作用反作用の関係にはあり得ないことが分かる。例えば、 ε に作用する $-C_{\varepsilon 2} \varepsilon^2 / k$ という‘力’は k に $C_{\varepsilon 2} \varepsilon^3 / 3k^2$ のような反作用をもたらすはずだが、そのような項は k の式には見当たらない。

4. 粘性の無い流体の変分原理

Action を書き下すことができれば、その不変性に着目してネーターの定理⁶を用いいろいろ

⁶ 場の変換で Action が不変であるとき、運動方程式に従って場が変化しても不変に保たれる量があるという定理。ドイツの数学者 Amalie Emmy Noether により 1915 年に証明された。

ろ有益な情報を引き出すこともできる。流体の力学でも Action が存在するかというのは、流体の場の理論をつくる上で重要な問題であった。ここではこの問題への取り組みを振り返ってみる。

粘性が無くエネルギー損失が無い非圧縮性の流体の運動はオイラー方程式で記述される：

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

$\mathbf{u} = (\mathbf{r}, t)$ は、場所 \mathbf{r} 時刻 t における流体の速度、 p は同じ時空点での圧力、 ρ は密度である。また $\dot{\mathbf{u}} \equiv \partial \mathbf{u} / \partial t$ は時間に関する偏微分を表す。なお、流体力学で‘非圧縮性’とは、とくに断らなければ密度のラグランジュ微分—流体要素が描く軌道すなわち流線に沿った時間変化—がゼロ

$$D_t \rho \equiv \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

を意味する。これと連続の式—または質量保存の式—

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

から、非圧縮性の条件は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

と簡潔に表すのが習慣である。必ずしも、密度がいつでもどこでも一定というわけではない。

流体をつくる一つの粒子があるとして、時刻 t におけるその場所を \mathbf{g} で表すことにする。すなわち

$$\mathbf{u}(\mathbf{g}(t), t) = \frac{d}{dt} \mathbf{g}(t)$$

$\mathbf{g}(t)$ が描く曲線が流線である。この粒子の加速度が作用する力—圧力勾配に等しいとおくと

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla_g p &= \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{g}(t), t) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{g}, t)}{\partial t} + \frac{d\mathbf{g}}{dt} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{g}, t)}{\partial \mathbf{g}} \\ &= \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \cdot \nabla_g \mathbf{u} \end{aligned}$$

となり、上のオイラー方程式が得られる。右辺の微分演算子 $\partial / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ をラグランジュ微分と呼ぶ。右辺第2項がいわゆる移流項で、粒子の運動を速度場と関連づける。

\mathbf{c} を定ベクトルとして、方程式がガリレイ変換

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{c}t, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{c}$$

のもとで不変であるべしという要請からもラグランジュ微分形を導くことができる。実際、‘加速度’は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} &= \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} (\mathbf{u} - \mathbf{c}) + \frac{\partial r'_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r'_i} (\mathbf{u} - \mathbf{c}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{u}' - \mathbf{c} \cdot \nabla' \mathbf{u}'\end{aligned}$$

であるので、この右辺の \mathbf{C} にあからさまに依存する項を打ち消すためには、 $\partial \mathbf{u} / \partial t$ の他に別途 $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ 項が必要なのである。

最初に、オイラー方程式を粒子の運動に着目して（ラグランジュ描像という）導いた。これは質点系の力学と同じ考え方なので、Action を同じしかたで構成できる。すなわち、 \mathbf{g} を力学変数として

$$A_{\text{particle}} = \int L_{\text{particle}} d\mathbf{r} dt, \quad L_{\text{particle}} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{d\mathbf{g}}{dt} \right)^2 - \mathbf{g} \cdot \nabla p - U$$

である。 U はポテンシャルエネルギーである。

オイラー方程式は場の変数 \mathbf{u} だけで書かれている。そこで場そのものを力学変数として場についての変分原理を作り上げることを考えるのは当然である。この仕事は Lin (1963), Van Saarloos (1981) によってなされた。以下、Lin (1963) の方法をもとに説明する (Mittag et al. 1968 を参照のこと)。

非熱的に流れていて流線に沿ってのエントロピーが保存される流体を考える。有効ラグランジュアン密度として

$$L_E = \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 - \rho(e(\rho) + U) - \lambda \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) + \rho \mu \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s \right)$$

を採用する。 s は単位質量あたりのエントロピーである。第 1 項は運動エネルギー、第 2 項は内部エネルギーと位置エネルギーの和、第 3, 4 項は質量保存とそれ以外の物理量 s の保存をラグランジュの未定乗数 λ, μ を用いて外的条件として導入したものである。第 3 項では密度は仮に変わりうるものとしている。第 4 項に関しては Lin (1963) は流線に沿っての保存量として、初期時刻における流体各点の位置という 3 成分のベクトルを考えたが、我々の目的のためには実は 1 成分で十分なのでここでは非熱過程における任意の保存量—例えば単位質量あたりのエントロピーを用いる。

$\mathbf{u}, \rho, \lambda, \mu, s$ の変分から、非圧縮性流体に対し

- (i) $\mathbf{u} + \nabla \lambda + \mu \nabla s = 0$
- (ii) $\frac{\mathbf{u}^2}{2} - \frac{d(\rho e)}{d\rho} - U + \dot{\lambda} + \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda = 0$
- (iii) $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
- (iv) $\dot{s} + \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0$

$$(v) \quad \dot{\mu} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mu = 0$$

を得る。(i) から

$$(vi) \quad \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \mu \times \nabla s = 0$$

が成り立つことに注意しておく。

ガリレイ変換 $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{c}$ (\mathbf{c} は定ベクトル) のもとで L_E の右辺第 1 項は不変ではないので、この方法がガリレイ変換で不変でないかもしれないという不安が生じる。しかし、同時に

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \lambda + \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} \\ e + U &\rightarrow e + U + \frac{\mathbf{c}^2}{2} \end{aligned}$$

に従って形式的に λ, e, U も変換されるとすると (i) から (v) までの式は不変に保たれることがわかる。 λ にはこのような重要な役割がある。

(i) を時間微分し、(ii) を空間微分して

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} + \nabla \dot{\lambda} + \dot{\mu} \nabla s + \mu \nabla \dot{s} &= 0 \\ \nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} - \nabla \frac{d(\rho e)}{d\rho} - \nabla U + \nabla \dot{\lambda} + \nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

を得る。この 2 式を互いに引き算して $\nabla \dot{\lambda}$ を消去すると

$$\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mu} \nabla s + \mu \nabla \dot{s} - \nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \nabla \frac{\delta(\rho e)}{\delta \rho} + \nabla U - \nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla \lambda) = 0$$

(i) を使って $\nabla \lambda$ を、また (iv) と (v) を使って \dot{s} と $\dot{\mu}$ を消去すると

$$\dot{\mathbf{u}} + \nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \nabla \frac{d(\rho e)}{d\rho} + \nabla U - \mathbf{u} \cdot \nabla \mu \nabla s + \mathbf{u} \cdot \nabla s \nabla \mu = 0$$

となる。左辺最後の 2 式は $\mathbf{u} \times (\nabla \mu \times \nabla s)$ とまとめられるが、(vi) よりこれは $-\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$ である。恒等式

$$\nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

と $d(\rho e)/d\rho = p$ を代入してオイラー方程式

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p / \rho - \nabla U$$

が導かれる。もしも流線に沿った保存量—ここではエントロピー s —を導入しなかったとすると、(vi) より $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ 、すなわち非回転の流れだけしか扱えない (Eckart 1938; Herivel 1955)。オイラー方程式の導出には保存量の存在が重要であることが分かる。

ここに述べた変分法は数学的には巧みにできているのであるが、しかし、正準理論への見

通しはあまり立たない。 ρ と s の正準共役運動量をそれぞれ $p_\rho = -\lambda$ と $p_s = \mu\rho$ としてハミルトニアンを作ることはできるが \mathbf{u} に対しては存在せず、 \mathbf{u} そのものをどう考えればよいのか分からないのである。正準理論を作れないということは拡張性に劣るということであって、通常のラグランジュ未定乗数法を標準的変分法に組み込んだモデルに内在する欠陥と考えられる。なお、Van Saarloos たち (1981a, b) は、オイラー方程式についてラグランジュ未定乗数法を用いることなく、オイラー描像とラグランジュ描像を結びつける正準変換が存在することを示している。

5. 拡散または散逸と変分原理

5.1. 決定論的方法

粘性流体の運動は N-S 方程式で表される。これを変分原理から導く、または変分法との関連を明らかにする試みは、おもに数学的な観点からなされてきた。しかし、古典的変分原理と N-S 方程式が相性が悪いことは久しく知られていることである。全微分が 0 になるという条件から N-S 方程式を導き出すような古典的 Action を構成することはできないのである。これは、実変数の力学が 1 階微分と 2 階微分が混在した式で表されているためである。

全微分ではない‘変分’量をいわゆる非ホロノミー条件として加えることで散逸方程式を導くことができることはラグランジュ未定乗数法を用いて Fukagawa & Fujitani (2012) によって示されている (なお Yourgrau & Mandelstam 1968 も参照されたい)。かれらの方法の概略は次のようである。

時刻 t において観測者に固定した系での空間の点 \mathbf{x} にいる無限小流体要素の初期位置をラグランジュ座標と呼び $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ で表すことにする。 \mathbf{q} は \mathbf{x} と t の関数であるが、微小流体要素の流線上の運動 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ に着目したとき、定義によって $\mathbf{q}(\mathbf{x}(t), t)$ は時間によらないことから

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla q_i = 0$$

の条件を満たす。有効ラグランジュアン密度を

$$L_{\text{eff}} = \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 - \rho e(\rho, s) + p_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla q_i \right)$$

で定義する。ラグランジュ座標に対する拘束条件をラグランジュ未定乗数 p_i を用いて導入している。また、温度 T のもとでエントロピー s が、粘性応力 σ_{ij} によってなされる正味の仕事と熱流 \mathbf{J}_Q が運び込む正味の熱量の分だけ増加するとして

$$T\rho\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s\right) - \sigma_{ij}\partial_i u_j + \nabla \cdot \mathbf{J}_Q = 0$$

を第2の拘束条件として採用する。第3の拘束条件は内部エネルギー e が圧力が外部にする仕事と熱の流入によって変化することを考慮したもので

$$de = -Pd\rho^{-1} + Tds$$

である。 P は圧力である。これらを用いると、 \mathbf{q} と \mathbf{u} の変分からそれぞれ

$$\begin{aligned} (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{p_i}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\mathbf{u}^2}{2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_j}{\partial q_i} &= 0 \\ u_i + \frac{p_j}{\rho} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned}$$

を得る。2番目の式に $\partial_t + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times \nabla \times$ を作用させ1番目の式を用いて p/ρ を消去するとN-S方程式が得られる。上の導出法は、第4章で紹介したオイラー方程式におけるLin (1963) のそれと似ているが、粘性応力がもたらす散逸が熱力学の法則に従って温度、エントロピー等と関係づけられることがポイントである。

非ホロノミー条件をスカラー場を含むように取り入れることで場の理論としての乱流モデルをつくることもできる (Takahashi 2016)。(このときに得られるモデルは平行板乱流と円管乱流の平均流を半定量的に再現できる。)しかし、非ホロノミー条件の導入は、見かけ上N-S方程式を変分原理から導くという目的のために変分原理からは導けない別の運動方程式を仮定することと同等である。さらに、粘性場という未知の場が流れとどのように相互作用すべきかという我々が当面する問題の解決には直接つながらない。他方、非ホロノミー条件無しに全微分を用いる変分法は理論の拡張性が高く、乱流の平均現象を非常に良く説明できるだけでなく物理的対象を大きく広げることができる。これについては第6節以降で論じられる。

5.2. 確率論的方法

ブラウン運動のような確率過程のなかでエネルギーを散逸させるとき、運動エネルギーが極値をとるのは流体がN-S方程式に従う場合だけであることを示すのは変分原理を探す問題に対する迫り方の一つである。ブラウン粒子が速度 \mathbf{v} をとる確率はマクスウェル分布式

$$P(\mathbf{v}, t) = (2\pi\sigma^2 / 2\beta)^{-1/2} \exp(-\beta\mathbf{v}^2 / \sigma^2)$$

で与えられること、粒子の速度の集団平均が流速になることを思い出すと、望む結果が得られることはある程度予想できよう。(確率分布の時間変動を含む詳しい議論については、例

えば、豊田 1978 ; Keizer 1987 ; 寺本 1990 を参照のこと。) ただし、上記の \mathbf{v} は決定論的流速ではなく確率論的浸透速度あるいはドリフト速度であることに注意すべきである。それは確率変数であって、その分布は温度に依存する。他方、流体各部分間の速度勾配の存在による運動量の交換が粘性力を生み流れを加速するという決定論的力学の描像では、粘性は第 1 近似では温度には依らない (例えば, Sears 1972)。両者には概念上の違いが存在するのである。なお、この方面の研究については Inoue & Funaki (1979), Yasue (1981), Nakagomi et al. (1981), Cipriano & Cruzeiro (2007), Constantin & Iyer (2008), Eyink (2010) を参照されたい。これらの議論はあまりにも数理的で、これらに基づいて正準理論を構築するのは難しく、したがってモデルの拡張と流れ現象への応用に関しては柔軟性に乏しいように思われる。

5.3. 拡散方程式とラグランジュ未定乗数法

5.1 で見たように、通常、ラグランジュ未定乗数法はシステムに対して課される拘束条件を標準的な変分原理に取り込むときに用いられる。問題を非常に扱いやすいものにできる利点があり、安直ではあるが運動方程式そのものに直接適用することもできる。Salmon (1988) の例に従ってこの点をより詳しく説明しよう。温度 T に関する次の熱伝導式を考える：

$$\dot{T} = \kappa \Delta T, \quad \kappa > 0$$

κ は正であるからこれは拡散方程式である。ラグランジュアン密度として次のものを採用する：

$$L_T = \alpha (\dot{T} - \kappa \Delta T)$$

実変数の補助場 α がラグランジュ未定乗数である。Action $\int L_T dr dt$ で α について変分をとれば初めの熱伝導式が得られるが、 T に関して変分をとると

$$\dot{\alpha} = -\kappa \Delta \alpha$$

を得る。すなわち、 α は凝集性の場合である。境界条件は何でもいので特に閉鎖系を考えると、そこでも凝集するということである。 α は T の正準共役量であるが、実体的意味は不明・非物理的で、あくまでも便宜上導入したものである。物理的世界では $\alpha = 0$ である。なお、この 'Action' は Sogo (2017), Takahashi (2017a) によっても考察されている。

正準 'ハミルトニアン' は

$$\begin{aligned} H_T &= \int (\alpha \dot{T} - L_T) dr \\ &= \int \kappa \alpha \Delta T dr \end{aligned}$$

となる。ハミルトンの正準方程式は

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \frac{\delta H_T}{\delta \alpha} = \kappa \Delta T \\ \dot{\alpha} &= -\frac{\delta H_T}{\delta T} = -\kappa \Delta \alpha\end{aligned}$$

となり、確かに正しい運動方程式を与える。また、積分の境界で場が十分速く 0 になるとすると、運動方程式を用いた後に部分積分を実行して

$$\begin{aligned}\dot{H}_T &= \int \kappa (\dot{\alpha} \Delta T + \alpha \Delta \dot{T}) d\mathbf{r} \\ &= \int \kappa (-\kappa \Delta \alpha \Delta T + \kappa \alpha \Delta^2 T) d\mathbf{r} = 0\end{aligned}$$

より、ネーターの定理から期待される通り H_T は運動の恒量であることが確かめられる。

動力学におけるラグランジュ未定乗数法は、もとの系の力学自由度を拘束条件の下で制限する場合に用いられるのが普通である。この場合、系の位相空間の次元数は拘束条件の数だけ減り、力学の正準形式は次元数とハミルトニアンの変化によりもとは異なる形式をとることになる。(この事実は系を量子化するときに重大な意味を持つ。)ただし、拘束条件を使って余分の自由度を消去し、初めから力学自由度を減らしたラグランジュアンを書き下せば、それを基に通常の正準形式をつくりあげることができる。

本節で議論したラグランジュ未定乗数法は、力学自由度を減らすものではなく、この点で 5.1 の例と同類である。したがって、元の系の自由度をすべて生かして通常の方法で正準形式を採用できるのである。

5.4. 複素場

ラグランジュ未定乗数法は、意味不明の凝集場を導入するという点を除くと、正準理論を構成する上で良い見通しを提供する (Sogo 2017)。凝集場というこの招かれざる客を表面的に取り除くことを考える (Takahashi 2017a)。

再び熱伝導式を取り上げる。次のような複素温度 τ を導入しよう：

$$\tau = T + i\alpha$$

これは温度を仮りに複素数にまで拡張するということで、物理的に意味のある結果を得るためには最終的には $\alpha \rightarrow 0$ とすべきものである。(実際、 $\alpha = 0$ は適当な初期条件のもとでの解である。) τ と $\tau^* = T - i\alpha$ で L_T を書き直すと

$$\begin{aligned} L_T &= \frac{\tau - \tau^*}{4i} (\dot{\tau} + \dot{\tau}^* - \kappa \Delta (\tau + \tau^*)) \\ &= \frac{i}{4} \left(2\tau^* \dot{\tau} + \kappa (\nabla \tau^*)^2 - \kappa (\nabla \tau)^2 \right) \end{aligned}$$

となる。全微分の項は落としている。ハミルトニアンは

$$H_T = \frac{i}{4} \int \kappa \left(-(\nabla \tau^*)^2 + (\nabla \tau)^2 \right) d\mathbf{r}$$

であるが、 τ の共役運動量 $\pi = i\tau^*/2$ を使ってこれを書き直すと

$$H_T = i \int \kappa \left((\nabla \pi)^2 + \frac{1}{4} (\nabla \tau)^2 \right) d\mathbf{r}$$

となる。フーリエ成分で次のように書くと

$$\tau(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{V}} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\tau}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \pi(\mathbf{r}) = \frac{i}{\sqrt{2V}} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\tau}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H_T &= \frac{i\kappa}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^2 (\tilde{\tau}_{-\mathbf{k}} \tilde{\tau}_{\mathbf{k}} - \tilde{\tau}_{-\mathbf{k}}^* \tilde{\tau}_{\mathbf{k}}^*) \\ &= \frac{\kappa}{4} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^2 \left[(\tilde{\tau}_{-\mathbf{k}} - i\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}^*) (\tilde{\tau}_{-\mathbf{k}}^* + i\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}) - (\tilde{\tau}_{-\mathbf{k}}^* - i\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}) (\tilde{\tau}_{-\mathbf{k}} + i\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}^*) \right] \end{aligned}$$

である。ハミルトン方程式は

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= \frac{\delta H_T}{\delta \pi} = -2i\kappa \Delta \pi = \kappa \Delta \tau^* \\ \dot{\pi} &= -\frac{\delta H_T}{\delta \tau} = \frac{i}{2} \kappa \Delta \tau = -\kappa \Delta \pi^* \end{aligned}$$

で、先に得た T と α の運動方程式に一致し、正準形式が可能であることが分かる。実数の温度にするには最後に $\alpha \rightarrow 0$ とすればよい。なお、正準形式におけるポアソン括弧式は

$$\{\tau(\mathbf{r}), \pi(\mathbf{r}')\}_P \equiv \int \left(\frac{\delta \tau(\mathbf{r})}{\delta \tau(\mathbf{r}'')} \frac{\delta \pi(\mathbf{r}')}{\delta \pi(\mathbf{r}'')} - \frac{\delta \pi(\mathbf{r})}{\delta \tau(\mathbf{r}'')} \frac{\delta \tau(\mathbf{r}')}{\delta \pi(\mathbf{r}'')} \right) d\mathbf{r}'' = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

であり、フーリエ成分で表すと

$$\frac{i}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left\{ \tilde{\tau}_{\mathbf{k}}, \tilde{\tau}_{\mathbf{k}'}^* \right\}_P e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}$$

であるから

$$\left\{ \tilde{\tau}_{\mathbf{k}}, i\tilde{\tau}_{\mathbf{k}'}^* \right\}_P = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$$

とななければならない。これは、フーリエ係数に関するポアソン括弧式は

$$\{A, B\}_P = \sum_{k''} \left(\frac{\delta A}{\delta \tilde{\tau}_{k''}} \frac{\delta B}{i \delta \tilde{\tau}_{k''}^*} - \frac{\delta A}{i \delta \tilde{\tau}_{k''}^*} \frac{\delta B}{\delta \tilde{\tau}_{k''}} \right)$$

のように定義されなければならないことを意味する。

[以下次号]