

【論 文】

流体力学における変分原理と乱流の平均場理論

——「渦のパラドックス」のその後——

II 変分原理と乱流の平均場理論

高 橋 光 一

第 I 部 (高橋 2018) で, 乱流の性質と流体力学における変分原理を概観した。本稿第 II 部では, 新しい変分原理に基づく乱流理解について解説する。

II 部目次

6. 非圧縮性 N-S 方程式の変分原理	30
7. N-S 方程式と保存量	33
8. 複素スカラー行列場の導入	34
9. 相互作用の導入と動力的有効粘性モデル	36
9.1. 最小相互作用の動力的渦粘性モデル (MDEV M)	36
9.2. MDEV M における平行板乱流	40
9.3. 円管乱流	46
9.4. 有効粘性と渦粘性	47
9.5. 圧縮性流体への拡張と天体円盤	49
10. テンソルの導入とレイノルズ応力	50
10.1. 複素ベクトル行列場	50
10.2. 対称成分とレイノルズ応力との対応および反対称成分	54
10.3. 平行板乱流	56
10.4. 高次効果	58
11. まとめ	60
付録 A 粘性係数の分子運動論的説明	62
付録 B 円筒座標系における MDEV M 方程式—粘性流体—	64
付録 C 平行板乱流における平均速度場の経験式	64

付録 D スカラー・ベクトル系の運動方程式— φ, ω がある場合— 65
 参考文献 68

…物理学者は、流体力学を専門とする仲間にく乱流モデル>について尋ねるが、いつも苦笑いと、いくつかの仮説的な式と、長々とした注意が返ってくるだけなのである (Davidson 2015)。

6. 非圧縮性 N-S 方程式の変分原理

第 5 節で、ラグランジュ未定乗数法は正準理論を作る上で都合の良いものであることを確認した。そこで、これを N-S 方程式に応用することを考える。N-S 方程式を拘束条件として扱い、そのもとで例えばエネルギー散逸の最大値や最小値を数値的に見積もる方法を定式化する試みは Kerswell (1999) によってなされていて、やはりラグランジュ未定乗数を凝集性の補助場として導入している。

我々は、拡張性のある正準理論の構築を目的にラグランジュ未定乗数法を用いる。このとき速度場を複素数にするのである。問題は、N-S 方程式が非線形であるため、単純に補助場を 3 つ導入してラグランジュアンを書き下すと複素速度場で書いた有効ラグランジュアンが複雑冗長になることである。これを避けるために、我々は Salmon (1988), Sogo (2017), Takahashi (2017a) や Kerswell (1999) とは異なる手法を採用する。それは、速度場を $GL(2, C)$ の要素として統合し、Action を $SU(2) \sim O(3)$ 不変の形に表す方法である (Takahashi 2017b)。

まず、速度場 \mathbf{u} を複素数として 2 行 2 列の複素行列場

$$\Phi(\mathbf{u}) = u_i \sigma_i \equiv \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \det \Phi = -\mathbf{u}^2$$

を導入する。同じ添え字変数が積の中に 2 度現れたら和を意味することにする (アインシュタインの規約)。 $\boldsymbol{\sigma}$ はパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で次の交換関係を満たす：

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

ε_{ijk} は $\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = 1$ なる完全反対称テンソル、 \mathbf{u} と $\boldsymbol{\sigma}$ は空間回転についてベクトルである。すなわち 3 行 3 列の $SO(3)$ 表現行列 $\mathbf{R}(\theta, \mathbf{n})$ があって

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\mathbf{r}') &= \mathbf{R}(\theta, \mathbf{n})\mathbf{u}(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\sigma}' &= U_\sigma \boldsymbol{\sigma} U_\sigma^{-1} = \mathbf{R}(\theta, \mathbf{n})\boldsymbol{\sigma} \\ U_\sigma(\theta, \mathbf{n}) &= e^{-i\theta \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} \in SU(2) \end{aligned}$$

のように変換する。 \mathbf{n} は回転軸の方向、 θ は \mathbf{n} のまわりの回転角である。したがって $\Phi(\mathbf{u})$ は空間回転についてスカラーである。すなわち

$$\Phi'(\mathbf{u}') = U_\sigma \Phi(\mathbf{u}') U_\sigma^{-1} = \Phi(\mathbf{u})$$

この Φ とそのエルミット共役行列 Φ^\dagger を使い、次のような A_{NS} を構成する：

$$A_{\text{NS}} = \int L_{\text{NS}} dt \equiv \int L_{\text{NS}} d\mathbf{r} dt$$

$$L_{\text{NS}} = i\text{Tr} \left(\frac{1}{2} \Phi^\dagger \dot{\Phi} + \frac{1}{8} \Phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Phi^\dagger \cdot \nabla \Phi - \frac{1}{8} \nabla \Phi^\dagger \cdot \Phi \boldsymbol{\sigma} \Phi + \frac{\nu}{4} (\nabla \Phi^\dagger)^2 - \frac{\nu}{4} (\nabla \Phi)^2 - \frac{1}{2} \Phi^\dagger \mathbf{F} + \frac{1}{2} \mathbf{F}^\dagger \Phi \right).$$

ここで

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \left(-\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f}_{\text{ext}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

は複素圧力勾配と複素外力から作られる行列である。 Φ^\dagger の変分に関し A_{NS} が停留値をとるべしという条件より直ちに

$$\dot{\Phi} + \frac{1}{4} (\boldsymbol{\sigma} \Phi^\dagger \cdot \nabla \Phi + \nabla \Phi \cdot \Phi^\dagger \boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{4} \nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{\sigma} \Phi) - \nu \nabla^2 \Phi^\dagger - \mathbf{F} = 0$$

を得る。左辺第2,3項を

$$\frac{1}{4} (\boldsymbol{\sigma} \Phi^\dagger \cdot \nabla \Phi + \nabla \Phi \cdot \Phi^\dagger \boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{4} \nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{\sigma} \Phi) = \frac{1}{4} \nabla \cdot (\Phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \Phi) + \frac{1}{4} (\boldsymbol{\sigma} \Phi^\dagger + \Phi \boldsymbol{\sigma}) \cdot \nabla \Phi$$

と変形して \mathbf{u} を実数とすると

$$\{\sigma_i, \Phi\} = 2u_i$$

より右辺を

$$-\frac{1}{4} \nabla \Phi \cdot \{\boldsymbol{\sigma}, \Phi\} + \frac{1}{4} \{\boldsymbol{\sigma}, \Phi\} \cdot \nabla \Phi = \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi$$

と表すことができる。これを用い、初めの Φ の変分方程式に σ_i を掛けてトレースをとり \mathbf{u}

と f を実数とすると N-S 方程式

$$\dot{u}_i + \mathbf{u} \cdot \nabla u_i = \nu \nabla^2 u_i + f_i$$

が得られる。 A_{NS} は標準的な (運動エネルギー) - (ポテンシャルエネルギー) という形を取らず、 \mathbf{u} と f を実数とした極限で (表面積分を無視すれば) 0 になる。これは \mathbf{u} の虚部がラグランジュ未定乗数の役割を果たしているからで、このような Action を pseudoaction (擬 Action, PA) と呼ぶことにする。前節で考えた、熱伝導の Action も pseudoaction である⁷。

質量の保存は流体の性質にかかわらず成り立つ。流れに関する保存量はあるだろうか。N-S 方程式より、外力 f_{ext} が無いとき、流れの非保存

$$\dot{j}_0 + \nabla \cdot \mathbf{j} = -s$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned} j_0 &= \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{j} &= \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 \mathbf{u} - \frac{\nu \rho}{2} \nabla \mathbf{u}^2 + p \mathbf{u} \\ s &= \nu \rho (\nabla \mathbf{u})^2 \equiv \nu \rho (\partial_i u_j)^2 \end{aligned}$$

境界での表面積分を落とすことができるなら、運動エネルギーはエネルギー散逸率 s に相当する分だけ減少し続けるのである。

境界面上の積分が 0 にならない場合は、散逸分を補うエネルギー供給が可能である。このことを図 6 に描いた軸対称の円管流で見てみよう。軸方向を z -軸に、断面の中心から外側に向かって r -軸を取る。流速は円管の側面 $r=R$ で 0 とする (滑り無し条件 no-slip condition⁸)。上の流れの非保存の式を円管内の $z=0$ から $z=L$ の体積にわたって積分すると

$$\frac{d}{dt} K - 2\pi \int_0^R (p_1 - p_2) u_z r dr = -E_s$$

K は体積内の全運動エネルギー、 p_1 と p_2 は $r=0$ と L での圧力、 E_s は体積内のエネルギー散

⁷ 散逸系の pseudoaction を最初に考えたのは Bateman (1931) であろう。Bateman は、線形減衰調和振動子の方程式を変分原理から導くために、振動が増大するもう一つの振動子を導入して PA を書き下した。増大する振動子の変数がラグランジュ未定定数の役割を担っている。このモデルはその後の減衰調和振動子を多方面から研究するきっかけを与えた。詳しくは、例えば Dekker (1981) を参照されたい。

⁸ 流速が壁上で本当に 0 になるかは実験で確かめなければならない事である。壁に向かって速度が減少する様子から、それを単純に外挿して速度が 0 になる位置を決めることができる。その壁面からの距離を滑り長という。実験によれば、滑り長は乱流を構成する渦のうち最小のものよりもさらに小さい (Lauga et al. 2007) ので、応用上は滑り無し条件は妥当であると考えられている。

逸率である。定常流 $dK/dt=0$ の場合，負の圧力勾配がエネルギー散逸と釣り合っている。

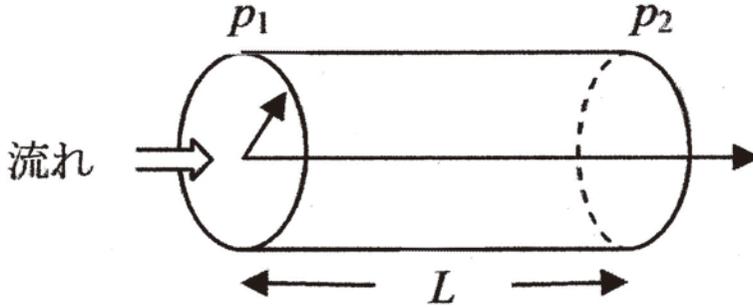


図6. 円管内の流れ

散逸したエネルギーの一部は熱となって流体を暖める (Bershadner 1995, Rott 1959, 高橋 2015b)。次節で示すように，このような状況下でも保存量があることが L_{NS} の形から分かるのである。

7. N-S 方程式と保存量

前節で，変分原理を適用できる PA が存在することが分かったので，正準理論の手続きに従って保存量を同定できる。その中で最も重要なのはハミルトニアンである。(ここではエネルギーではないので擬ハミルトニアン pseudoHamiltonian というべきであるが，簡単のためハミルトニアンと呼ぶ。PA から正準的に導かれた Hamiltonian にも ‘pseudo’ を付けないのが習慣になっている。) PA は時間並進について不変であり， Φ の正準共役運動量は $-(i/2)\Phi^{\dagger T}$ であることから，不変量であるハミルトニアンは Legendre 変換によって

$$H_{NS} = \int \left((i/2) \text{Tr}(\Phi^{\dagger} \dot{\Phi}) - L_{NS} \right) dr$$

$$= -\frac{i}{2} \int \text{Tr} \left(\frac{1}{4} \Phi^{\dagger} \sigma \Phi^{\dagger} \cdot \nabla \Phi - \frac{1}{4} \nabla \Phi^{\dagger} \cdot \Phi \sigma \Phi + \frac{\nu}{2} (\nabla \Phi^{\dagger})^2 - \frac{\nu}{2} (\nabla \Phi)^2 - \Phi^{\dagger} \mathbf{F} + \mathbf{F}^{\dagger} \Phi \right) dr$$

となる。任意の $\mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot \sigma$ について H_{NS} は不変量なので \mathbf{f} に微少の時間に依らない虚部 \mathbf{f}' を持たせてみる。すなわち

$$\delta \mathbf{F} = i \mathbf{f}' \cdot \sigma = i(\nabla k + \nabla \times \mathbf{h}) \cdot \sigma$$

最後の項はヘルムホルツの定理によって \mathbf{f}' をスカラーの勾配とベクトルの回転で表したも

のである。 f' によって \mathbf{u} に生じる虚部を \mathbf{u}' として

$$\delta\Phi = -\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\delta H_{\text{NS}} = \int \text{Tr} \left(\frac{i}{2} \Phi^\dagger \delta\dot{\Phi} + \frac{i}{2} \delta\Phi^\dagger \dot{\Phi} - \frac{\delta L_{\text{NS}}}{\delta\Phi^\dagger} \delta\Phi^\dagger - \frac{\delta L_{\text{NS}}}{\delta\Phi} \delta\Phi - \frac{\delta L_{\text{NS}}}{\delta\mathbf{F}^\dagger} \delta\mathbf{F}^\dagger - \frac{\delta L_{\text{NS}}}{\delta\mathbf{F}} \delta\mathbf{F} \right) d\mathbf{r}$$

であるが、第 3, 4 項は運動方程式から 0 である。したがって

$$\begin{aligned} \delta H_{\text{NS}} &= - \int \text{Tr} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{u}}' \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2} \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \Phi \delta\mathbf{F}^\dagger + \frac{1}{2} \Phi^\dagger \delta\mathbf{F} \right) d\mathbf{r} \\ &= \int (-\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}' + \mathbf{u}' \cdot \dot{\mathbf{u}} - 2\mathbf{u} \cdot (\nabla k + \nabla \times \mathbf{h})) d\mathbf{r} \end{aligned}$$

が運動の恒量となる。表面積分を落とすことができるとすれば、これは

$$\delta H_{\text{NS}} = \int (-\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}' + \mathbf{u}' \cdot \dot{\mathbf{u}} - 2\nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{h}) d\mathbf{r}$$

となる。 \mathbf{u} を z 依存性のない 2 次元流とし、また

$$\mathbf{h} = (0, 0, \zeta(z)), \quad \zeta(z) \rightarrow \text{定数}$$

の極限をとれば $f' \rightarrow 0$ であるから $\mathbf{u}' \rightarrow 0$ のはずで、任意の有限な \mathbf{h} に対し δH_{NS} が時間に依存しないことから

$$\frac{d}{dt} \int \nabla \times \mathbf{u} dx dy = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

を得る。すなわち境界面上または無限遠での 2 次元流の循環は、発散しなければ運動の定数である。

ラグランジュアン密度 L_{NS} には他にも不変性がある。例えば、 \mathbf{f} が回転についてベクトルのように振る舞う場合—このとき \mathbf{F} はスカラー—の空間回転不変性である。これに伴う不変量—擬角運動量—を構成できるが、速度場を実数にするとこれは 0 になる。擬運動量についても同様である。

8. スカラー行列表の導入

前節までの議論で、N-S 方程式の PA を複素行列表 $\Phi(\mathbf{u})$ を用いて簡明な形に表すことができることを知った。N-S 方程式では、流体内部の相互作用は変形応力 shear stress による

粘性項で与えられるが、これを不変性を維持しながら一般的なものに拡張することは形式的には容易である。例えば、 Φ をスカラー場として、 $\Phi^\dagger, \nabla, \sigma$ の組み合わせでこれらについて高次のスカラーを作るのが最も手っ取り早い方法であろう。この他、ベクトル場やテンソル場への拡張も考えられる。ここでは第1の方法について検討する。

このとき、次の二つの理由により Φ に回転のもとでの1成分スカラー場を含めたい。まず、3次の相互作用 Φ^3 をとると、これは Φ と Φ^2 との結合を通して、トレース0の場 Φ がトレースがある場 Φ^2 と相互作用する形になっている。別の言い方をすると、 Φ は $GL(2, C)$ のトレース0の要素であるが積について閉じていない。これは一般性を欠くだろう。そこで1成分スカラー場を Φ に加えることにする。次に、導入されたスカラー場が、本論文の冒頭で述べた、力学的自由度としての粘性場の性質を持ちうるかを調べたい。

Φ を次のように拡張してみよう：

$$\Phi(\mathbf{u}, \varphi) = \varphi + \mathbf{u} \cdot \sigma, \quad \det \Phi = \varphi^2 - \mathbf{u}^2$$

φ が複素スカラー場である。これにより一般に $\text{Tr} \Phi \neq 0$ となり、上記の第一の難点を取り除くことができる。この Φ を L_{NS} の Φ に代入して変分原理を適用すると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{R,i} + \varphi_R \partial_i \varphi_R + \mathbf{u}_R \cdot \nabla \mathbf{u}_{R,i} &= v \nabla^2 \mathbf{u}_{R,i} + f_{R,i} - \mathbf{u}_I \cdot \partial_i \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_{I,i} \nabla \cdot \mathbf{u}_I \\ \dot{\varphi}_R + \nabla \cdot (\varphi_R \mathbf{u}_R) &= v \nabla^2 \varphi_R \\ \dot{\mathbf{u}}_{I,i} + \varphi_R \partial_i \varphi_I + \mathbf{u}_R \cdot \nabla \mathbf{u}_{I,i} &= -v \nabla^2 \mathbf{u}_{I,i} + f_{I,i} + \mathbf{u}_I \cdot \partial_i \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_{I,i} \nabla \cdot \mathbf{u}_R \\ \dot{\varphi}_I + \varphi_R \nabla \cdot \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_R \cdot \nabla \varphi_I &= -v \nabla^2 \varphi_I \end{aligned}$$

なる運動方程式を得る。ここで添え字の R と I はそれぞれ実部と虚部を表す。さらに、 f の虚部が0のとき φ, \mathbf{u} の虚部 = 0 は運動方程式の解であることと非圧縮性を考慮すると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_i &= v \nabla^2 \mathbf{u}_i - \frac{1}{2} \partial_i \varphi^2 + f_i \\ \dot{\varphi} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi &= v \nabla^2 \varphi \end{aligned}$$

という運動方程式を得る。1番目の式は運動量方程式で右辺第2項を除くとN-S方程式に一致する。2番目の式は輸送方程式—または拡散方程式—である。その拡散係数は流体の動粘性係数—エネルギー散逸係数—に等しく、したがってプラントル数は1である。これは、流れの変形応力によるエネルギー散逸がすべて φ で表される何者かの拡散によって実現しているであろうことを意味する。(φ が何を表すかは後で明らかになる。)

上の 1 番目の式の右辺第 2 項は移流項の存在に伴って現れたもので、エネルギー散逸とは無関係である。この項が負の符号を持つということは、 ϕ^2 の勾配が流れに対して抵抗として作用するということである。流れが ϕ の強度を増す際に仕事をして、いわばその反作用を ϕ から受けるのである⁹。ただし、このような作用反作用項の出現は Φ の表現に依存する。 Φ として例えば $\Phi(\mathbf{u}, \phi) = i\phi + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $\det \Phi = -\phi^2 - \mathbf{u}^2$ という表現をとり ϕ の実部が物理的に意味のあるものとし虚部を 0 にすると \mathbf{u} の式に $-\partial_i \phi^2 / 2$ の項は現れない。しかし、このときは ϕ は凝集性の場となり好ましくない。我々は $\det \Phi = \phi^2 - \mathbf{u}^2$ の表現を採用する。

ϕ にどのような意味を与えるかは、モデルの内容を決めるうえで重要である。プラントル数が 1 であることから、エネルギー散逸の実態をそのまま反映するもの—渦運動—と解釈するのが妥当であろう。次節ではこの方向でのモデル構築を試みる。

9. 相互作用の導入と動力学的有効粘性モデル

9.1. 最小相互作用の DEVM (MDEVM)

Φ のトレース成分 ϕ はエネルギー散逸を担う可能性があることが分かった。同様な役割を担う場を導入して乱流を記述するモデルとして、第 2 節でとりあげた渦粘性モデルがある。そこでここでは、 ϕ が知られている渦粘性モデルと似たしかたで流れと相互作用するモデルを我々の PA の方法で構成してみたい (Takahashi 2017b)。

最も簡単な相互作用モデルは、 Φ と Φ^\dagger の 2 次と 3 次の項を含み微分は 2 階までを含むものである。加えて、モデルは次の条件を満たすものとする。

1. PA は実数である。
2. PA は $\Phi, \Phi^\dagger, \nabla, \boldsymbol{\sigma}$ のみで構成される。
3. PA は並進, 回転, ガリレイ変換のもとで不変である。
4. ϕ は速度勾配を通して流れと相互作用する。
5. 運動方程式の各項は、物理量が実数のとき全て実数である。

3 のガリレイ変換について説明しておく。ガリレイ変換とは一定速度で動く座標系への変換で、流体の速度を \mathbf{u} とすると

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{c}t, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{c}$$

⁹ 流体と共に流れる砂を想像するとこの事情を理解できる。濃度が小さいときは流体は自由に流れるが、下流で濃度が上がる (=濃度勾配が正) とそこでは砂の抵抗を受けるだろう。 ϕ はそのような濃度に相当するものを表すのであろう。

で定義される。 \mathbf{c} は実数の定数ベクトルである。ダッシュのついた座標系に移ってもニュートン力学の運動法則は不変でなければならない。N-S 方程式では、ラグランジュ微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial (\mathbf{u}' - \mathbf{c})}{\partial t'} + \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} \frac{\partial (\mathbf{u}' - \mathbf{c})}{\partial \mathbf{r}'} + (\mathbf{u}' - \mathbf{c}) \cdot \nabla \mathbf{u}' \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{c} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{r}'} + (\mathbf{u}' - \mathbf{c}) \cdot \nabla' \mathbf{u}' \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}'\end{aligned}$$

となり、確かに不変である。粘性項は、 \mathbf{c} が定数なので明らかに不変である。

これらを念頭に置くと、ラグランジュアの項として次のものが候補に挙がる。

$$\begin{aligned}\cdot L_{\text{Ld}} &= \frac{i}{2} \text{Tr} \left(\Phi^\dagger \dot{\Phi} + \frac{1}{4} \Phi^\dagger \sigma_i \Phi^\dagger \partial_i \Phi - \frac{1}{4} \partial_i \Phi^\dagger \Phi \sigma_i \Phi \right) \\ \cdot L_{\text{dis}} &= \frac{ic_0}{4} \text{Tr} \left((\nabla \Phi^\dagger)^2 - (\nabla \Phi)^2 \right) \\ \cdot L_{\text{kin}}^\varphi &= \frac{ic_2}{8} \left((\text{Tr} \nabla \Phi^\dagger)^2 - (\text{Tr} \nabla \Phi)^2 \right) \\ \cdot L_{\text{pot}}^\varphi &= i \left(-V \left(\frac{1}{2} \text{Tr} \Phi^\dagger \right) + V \left(\frac{1}{2} \text{Tr} \Phi \right) \right) \\ \cdot L^{(3)} &= \frac{ic_3}{8} \left(-\text{Tr} \Phi^\dagger \text{Tr} (\nabla \Phi^\dagger)^2 + \text{Tr} (\nabla \Phi)^2 \text{Tr} \Phi \right) - \frac{ic_3}{16} \left(-\text{Tr} \Phi^\dagger (\nabla \text{Tr} \Phi^\dagger)^2 + (\nabla \text{Tr} \Phi)^2 \text{Tr} \Phi \right) \\ \cdot L_f &= \frac{i}{2} \text{Tr} \left(-\Phi^\dagger \mathbf{F} + \mathbf{F}^\dagger \Phi \right)\end{aligned}$$

L_{Ld} と L_{dis} はラグランジュ微分と散逸項、 L_{kin}^φ と L_{pot}^φ は φ の運動量項とポテンシャル項、 $L^{(3)}$ は 3 次の相互作用項、 L_f は圧力勾配項と外力項の和である。 $\Phi^2 (= \varphi^2 + \mathbf{u}^2 + 2\varphi \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ など Φ や Φ^\dagger が直接隣接する項がないのはガリレイ変換不変性の要請からである。他に

$$\text{Tr} \left(\Phi^\dagger (\nabla \Phi^\dagger)^2 \right) - \text{Tr} \left((\nabla \Phi)^2 \Phi \right)$$

が考えられそうであるが、これも $(\nabla \varphi)^2 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \text{h.c.}$ という速度そのものが現れる項を含みガリレイ変換不変性を破るので除外される。なお、上記の項はすべて変換 $\Phi \rightarrow U \Phi U^{-1}$, $\mathbf{F} \rightarrow U \mathbf{F} U^{-1}$, $U \in SU(2) \sim O(3)$ のもとで、すなわち回転に対して不変である。

変分原理による運動方程式は、虚部を 0 として

$$\dot{u}_i + \mathbf{u} \cdot \nabla u_i = c_0 \nabla^2 u_i + c_3 \nabla \cdot (\varphi \nabla u_i) - \frac{1}{2} \partial_i \varphi^2 + f_i$$

$$\dot{\varphi} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = (c_0 + c_2) \nabla^2 \varphi - \frac{c_3}{2} (\nabla \mathbf{u})^2 - V'(\varphi)$$

となる。 $c_0 + c_3 \varphi$ は N-S 方程式における動粘性係数に対応する有効粘性係数である。これは渦粘性モデルにおける渦粘性（に定数を加えたもの）とよく似た現れ方をしていることが分かる。 φ に実質的な渦粘性という意味を与えることができそうである。ただし、上記のモデルでは、レイノルズ応力を記述できないので、レイノルズ応力と速度勾配の関係を論ずることができない。従って、乱流理論で扱われる渦粘性を導くことができない。この意味では、 φ が渦粘性と同じものかどうかは今の段階では判断できない。

この力学系では、 φ が $\nabla \mathbf{u}$ に作用したことによる $\nabla \mathbf{u}$ から φ への反作用が取り込まれていることに注意せよ。その結果、 c_3 が非ゼロである限り、 φ が定数となるのは $\nabla \mathbf{u}$ が定数のときのみとなる。したがって、N-S 方程式とは連続的につながらない。第 8 節のモデルが N-S 方程式に連続的につながるのは φ の $\nabla \mathbf{u}$ への直接的な作用が無かったからである。

$V'(\varphi)$ を決めなければならない。そのために、元々の N-S 方程式が時空反転 $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, $t \rightarrow -t$, $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}$, $\mathbf{f} \rightarrow -\mathbf{f}$ 及び動粘性係数の符号反転 $\nu \rightarrow -\nu$ のもとで不変であることを思い出そう。また、定常状態を表す方程式では、時間反転 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$, $\mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}$, $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f}$ と動粘性反転 $\nu \rightarrow -\nu$ のもとでも不変である (Takahashi 2014b, 2015)。この動粘性反転不変性は、今の我々のモデルでは $V'(\varphi)$ が φ の偶関数であることを意味する。また、速度勾配が無いときは φ はいたる所非ゼロの定数となるはずなので、 $V'(\varphi) = 0$ は $\varphi = \xi_0 = \text{定数}$ という解を持たなければならない。我々は、 d_ν を定数として最も簡単な

$$V'(\varphi) = d_\nu (\xi_0^2 - \varphi^2)$$

を採用する。

上記の速度場の方程式の右辺にある散逸項のうち第 1 項は N-S 方程式型、第 2 項は渦粘性モデル型である。我々は、乱流において φ が空間的にどのように変動するか、言い換えると渦粘性の場としての振る舞いに興味があるので、とりあえずは第 1 項を $c_0 = 0$ として落としておく。基本モデルは単純なほど良いからである。

以上で、速度勾配と相互作用する最も単純な有効粘性場の力学系を構成することができた。変分原理により導かれたので、その閉じた方程式系は力学的に辻褃が合っている。この力学系を（最小）動学的有効粘性モデル - (Minimal) Dynamical Effective-Viscosity Model, (M) DEVM - と呼ぶことにする。MDEVM は、このモデルの速度場が乱流の平均速度を表すと

考えられるので平均場モデルである。方程式を整理して次のように書き直しておく：

$$\begin{aligned} \dot{u}_i + \mathbf{u} \cdot \nabla u_i &= \nu_0 \nabla \cdot (\phi \nabla u_i) - \frac{\xi_0^2}{2} \partial_i \phi^2 + f_i \\ \text{MDEVM :} \\ \dot{\phi} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi &= \lambda_0 \nabla^2 \phi - \frac{\nu_0}{2\xi_0^2} (\nabla \mathbf{u})^2 + \frac{\lambda_1}{2} (1 - \phi^2) \end{aligned}$$

ここで $\nu_0 \equiv c_3 \xi_0$, $\lambda_0 \equiv c_2$, $\lambda_1 \equiv 2c_V \xi_0$ とした。 ν_0 は有効粘性係数であって分子粘性を表すものではないことに注意。 $\phi = \varphi / \xi_0$ は無次元である。 $\lambda_1 > 0$ であれば、流れが無いとき $\phi^2 = 1$ は安定点である。すなわち、速度勾配が十分小さく $\nabla \mathbf{u}$ の項は無視でき、かつ $\phi = 1 + \varepsilon$ が空間の全領域で十分 1 に近いとして 2 番目の式で右辺第 3 項を $-\lambda_1 \varepsilon$ に等しいとすると、この式はパッシブスカラーの輸送方程式

$$\dot{\varepsilon} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon = \lambda_0 \nabla^2 \varepsilon - \lambda_1 \varepsilon$$

になって、 λ_1 が正であれば長波長モードで $|\varepsilon|$ は時間と共に減衰することが容易に予想できる。短波長モードで安定から不安定への転移が起きることが予想されるが、ここでは議論しない。

MDEVM に似た渦粘性モデルとして Spalart & Allmaras の 1 方程式渦粘性モデル (Spalart and Allmaras 1992) がある。これは平均場の運動量方程式とブシネスク条件

$$\begin{aligned} \bar{u}_i + \bar{u}_j \partial_j \bar{u}_i &= -\partial_j \overline{\delta u_i \delta u_i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i - \frac{\partial_i \bar{p}}{\rho} + f_i \\ R_{ij} &= \overline{\delta u_i \delta u_j} = -\nu_t (\partial_i \bar{u}_j + \partial_j \bar{u}_i) \end{aligned}$$

に例えば次のような渦粘性の輸送方程式を付け加える：

$$\dot{\nu}_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \nu_t = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot (\nu_t \nabla \nu_t) + \frac{c_{b2}}{\sigma} (\nabla \nu_t)^2 + c_{b1} S \nu_t - c_w f_w \left(\frac{\nu_t}{d} \right)^2$$

S は典型的な速度勾配を表す量で、 $S \sim \sqrt{R_{ij}^2}$ のようにとる。 d は壁までの距離である。 ν_t とレイノルズ応力が対応していると見なすと、これは定常乱流ではレイノルズ応力の生成 (右辺第 2, 3 項) が小さな空間スケールでの消滅と釣り合っていることを表している。運動量方程式では有効粘性 $\nu_t + \nu$ が MDEVM の ϕ に、輸送方程式では、 S を定数とみなす (これは壁近傍では正しい) と、ポテンシャル項 $c_{b1} S \nu_t - c_w f_w (\nu_t / d)^2$ が MDEVM での $\lambda_1 (1 - \phi^2) / 2$ に対応することが分かる。

渦粘性の拡散項もほぼ似た構造をしているが、拡散項に微妙な違いがある。Spalart - All-

maras モデルでは $\nabla^2 v_t < 0$ (拡散の条件) であっても勾配 $|\nabla v_t|$ が十分大きければ拡散せず凝集することがあるのが特徴的である。

二つのモデル間の大きな違いは, Spalart - Allmaras モデルでは f_w という調整関数 - いわゆる減衰関数と似た方法 - を導入していることである。 f_w は対数領域で 1 前後の値をとり, 壁近くで増加し壁から離れると 0 に近づくように選ぶ (Spalart and Allmaras 1992)。このモデル構成により, 輸送方程式が空間座標に明示的に依存することになる。このようなモデルの構成法は, 実験をよく再現する渦粘性モデルにおいてしばしば採用され工学的に重宝するものであるが, 既に述べた動力的な観点からは魅力的でない。

もう一つの注意すべき違いは, Spalart - Allmaras モデルでは輸送方程式に対称テンソル $\partial_i \bar{u}_j + \partial_j \bar{u}_i$ だけが現れるのに対し, MDEVM には反対称テンソル $\partial_i \bar{u}_j - \partial_j \bar{u}_i$ も現れるということである。実際, MDEVM の輸送方程式右辺第 2 項は

$$-\frac{v_0}{2\xi_0^2}(\nabla \mathbf{u})^2 = -\frac{v_0}{8\xi_0^2} \left[(\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 + (\partial_i u_j - \partial_j u_i)^2 \right]$$

と変形できて, 対称テンソルと反対称テンソル = 渦度が対等に寄与していることが分かる。レイノルズ応力の生成消滅において渦度の寄与も重要であることについては, 既に多くの研究がある (Pope 1975; Speziale et al. 1991; Speziale 1991; Speziale 1996; Shih 1996; Weatheritt and Sandberg 2016)。

9.2. MDEVM における平行板乱流

我々の MDEVM を平行板乱流に適用してみる。 y -方向に間隔 $2d$ だけ離して平行に 2 枚の平板を置き, その間に x -方向に流体を流す (図 7)。レイノルズ数が十分大きいと, 平行板の壁面で流れの層が剥離して大小の渦をつくり, 層流から乱流に移行する。

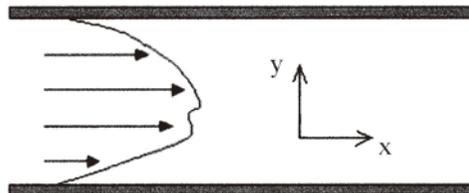


図 7. 平行板間の流れ

乱流状態で観測されるのは各種の平均量で, 理論・応用上最も重要なのは平均流速とレイノルズ応力である。MDEVM では, $\mathbf{u} = (u_x(y), 0, 0)$ は平均流速, $\varphi = \varphi(y)$ は渦粘性に対応する - 渦粘性モデルにおける渦粘性そのものではない - と仮定して, 以下で我々のモデルか

らの帰結を調べる。 ξ_0 は速度の次元を有することに注意して変数を無次元化すると、方程式は次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned} (\phi \hat{u}_x')' + \alpha &= 0, \quad \alpha \equiv \frac{\lambda_0 \tilde{f}_x}{\nu_0 \xi_0 \lambda_1} = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} \\ \phi'' - \frac{\beta}{2} (\hat{u}_x')^2 + \frac{1}{2} (1 - \phi^2) &= 0, \quad \beta \equiv \frac{\nu_0}{\lambda_0} = \text{Pr} \\ \hat{u}_x &\equiv u_x / \xi_0 \\ \tilde{f}_x &\equiv -\frac{\partial_x p}{\rho} \end{aligned}$$

ダッシュは次のように定義される無次元座標 \hat{y} に関する微分を表す。

$$\hat{y} \equiv y / \ell_c, \quad \ell_c = (\lambda_0 / \lambda_1)^{1/2}$$

$\text{Re} \equiv \ell_c \xi_0 / \nu_0$ は ξ_0 が系の典型的な速度値を表すと仮定したときのレイノルズ数、 $\text{Fr} \equiv (\xi_0^2 / (\tilde{f}_x \ell_c))^{1/2}$ はフルード数、 $\beta \equiv \text{Pr}$ はプラントル数である。

注意を一つ。上の式は、速度関数を $\hat{u}_x / \alpha \rightarrow \hat{u}_x$ のように再定義すると

$$\begin{aligned} (\phi \hat{u}_x')' + 1 &= 0, \\ \phi'' - \frac{\alpha^2 \beta}{2} (\hat{u}_x')^2 + \frac{1}{2} (1 - \phi^2) &= 0, \end{aligned}$$

となり、実質的にパラメータは一つだけとすることができる。この第2の表現から分かるように、解を表すスケール関数の形は $\alpha^2 \beta$ だけで決まる。しかし、 β がプラントル数という重要な意味を持つことを考慮して、ここでは α と β を切り離した第1の表現の方程式を扱うことにする。

パラメータは α の他にプラントル数 β がある。 ϕ が渦自由度の励起を表すとすると、 λ_0 は渦の拡散による ϕ の減衰の程度を決める。 ν_0 は流れのエネルギー散逸の割合を決める。エネルギー散逸は、渦形成と拡散、熱や音波の生成によって起きる。プラントル数は、このエネルギー散逸の割合の ϕ の拡散の割合に対する比である。

α が定数のとき1番目の式を1回積分して

$$\hat{u}_x' = \frac{C_1 - \alpha \hat{y}}{\phi}$$

を得る。 C_1 は積分定数である。流れの対称性から、

$$C_1 = \alpha \hat{d}$$

でなければならない。

ϕ が壁上で 0 とすると \hat{u}_x は壁上で発散し現実的でない。したがって

$$\phi_0 \equiv \phi(0) \neq 0$$

でなければならない。

α を定数としたときにこの系の解を数値的に求めるのは簡単である。1 以下の β に対し、 ϕ を図 8 に、 \hat{u}_x を図 9 に示す。 ϕ は壁付近で最小値を取り、流れの中央に向かって単調に増加する。絶対値はプラントル数 β と共に増える。全体的に正弦関数的振る舞いを見せる。横軸に対数目盛を用いている図 9 では、粘性底層と対数領域の間でグラフの折れ曲がりが見える。この曲がりの曲率は、 β が小さいほど大きくなる傾向がある。 $\beta \rightarrow 1$ で急激にモデルフィッティングがうまくいき、 $\beta \approx 1$ で実験をよく再現する。

実験を最も良く再現する $\beta = 1$ の場合のモデルデータを表 1 に与える。

\hat{u}_x は、壁に近いところでは \hat{z} について線形に増加し、流れ中央の手前では対数的に増える。前者の領域が粘性底層、後者がいわゆる対数領域である。粘性底層では流速は

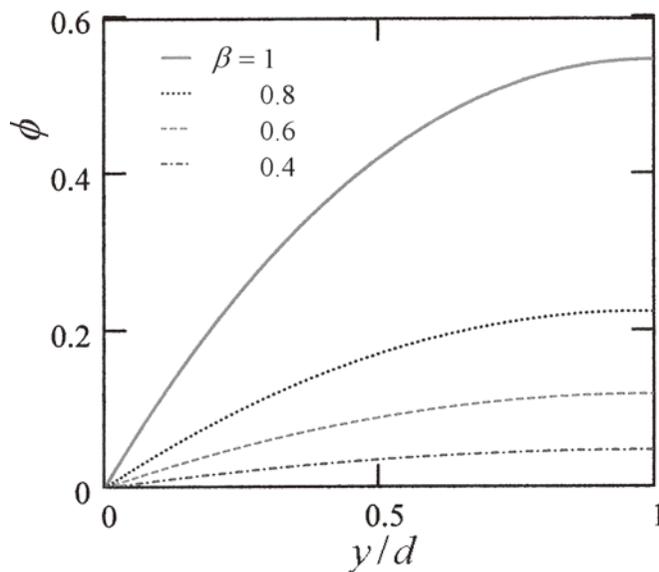


図 8. ϕ の y/d 依存性。 $z=0$ が一つの平行板の位置、 $y=1$ が平板の中間点。

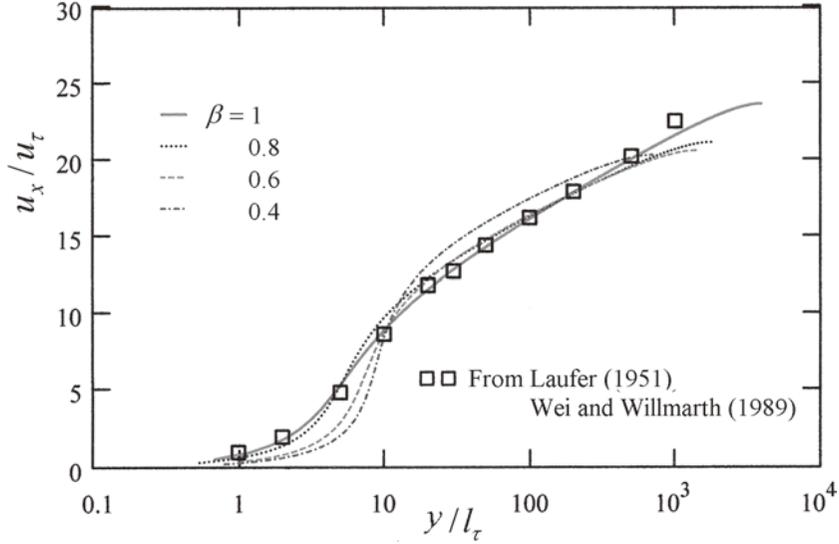


図9. 平行板間の流速分布。□は $Re = 12000 \sim 40000$ 。

表1. 平行平板流の解のデータ: $\beta = 1$ としている。

α	$\phi(0)$	$\phi'(0)$	$\hat{u}(0)$	$\hat{u}'(0)$	\hat{u}_{\max}	\hat{d}	\hat{u}_τ	\hat{l}_τ
0.01	0.001	-0.45	0	20	0.32	1.7	0.01	$4.3 \cdot 10^{-1}$

$$\hat{u}_x = \left(\hat{u}_\tau / \hat{l}_\tau \right) \hat{y} = \hat{u}_1 \hat{y}$$

のように表される。 u_τ は壁摩擦速度、 l_τ は壁摩擦長である。実験によれば、 $Re = 30000, 66000$ に対し $\hat{u}_\tau / \hat{l}_\tau = 45, 80$ である (Laufer 1951)。

対数領域は、 ϕ が線形的に増加する領域と重なるが、これは上記の \hat{u}_x の方程式から定性的には容易に理解できる。より定量的には次のように考えればよい。いわゆる‘対数領域’での ϕ の関数形を

$$\phi \sim A(\hat{y} + B)(C - \hat{y}), A\hat{d}^2 = O(1) = C/\hat{d}$$

と2次関数で近似する。 $\phi(0)$ は1に比べ非常に小さいので、 B も同様に小さい。すると、

$$\hat{u}'_x(\hat{y} = \hat{d}) = 0 \text{ として}$$

$$\hat{u}'_x(\hat{y}) \sim \frac{\alpha}{A(B+C)} \left(\frac{\hat{d} + B}{\hat{y} + B} - \frac{C - \hat{d}}{C - \hat{y}} \right)$$

これを積分して

$$\hat{u}_x(\hat{y}) \sim \frac{\alpha}{A(B+C)} \left((\hat{d}+B) \ln(\hat{y}+B) - (\hat{d}-C) \ln(C-\hat{y}) \right)$$

よって、 B が問題にしている \hat{y} に比べ十分小さければよく知られた対数的振る舞いが \hat{u}_x に現れる。このときのカルマン定数は \hat{u}_x / \hat{u}_τ を

$$\frac{\hat{u}_x}{\hat{u}_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \hat{y} + C'$$

で表したときの κ

$$\kappa \approx \frac{AC\hat{u}_\tau}{\alpha\hat{d}}$$

で与えられる。ここで u_τ は壁摩擦速度 $u_\tau = (v_0 \partial u_x / \partial y|_{y=0})^{1/2}$ であるが、運動方程式より定まる $\partial u_x / \partial y|_{y=0}$ を用い、さらに $\phi(0) \ll 1$, $\beta \approx 1$ として

$$\hat{u}_\tau \approx \text{Re}^{-1/2} (1 + 2\phi''(0))^{1/4}$$

である。また壁摩擦長 l_τ は、速度が u_τ になる壁からの距離で

$$\hat{l}_\tau \approx \text{Re}^{-1/2} (1 + 2\phi''(0))^{-1/4}$$

で与えられる。

u_τ に対する u_x の比は

$$\frac{u_x}{u_\tau} \approx \frac{\hat{d} \text{Re}^{3/2}}{AC \text{Fr}^2} (1 + 2\phi''(0))^{-1/4} \ln \hat{y},$$

で与えられる。ここでレイノルズ数とフルード数を使った α の定義

$$\alpha \equiv \frac{\lambda_0 \tilde{f}_x}{v_0 \xi_0 \lambda_1} = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2}$$

を用いている。フローデ数は

$$\text{Fr} \equiv \frac{\xi_0}{\sqrt{\tilde{f}_x \ell_c}} = \text{Re}^{1/2} \sqrt{\frac{v_0 (\xi_0 / \ell_c)^2}{\tilde{f}_x \xi_0}}$$

のように書ける。カルマン定数 κ は速度分布式の $\ln z$ の係数の逆数のことなので

$$\begin{aligned}\kappa &\approx \frac{ACFr^2}{\hat{d} Re^{3/2}} (1+2\phi''(0))^{1/4} \\ &= \frac{AC}{\hat{d}} (1+2\phi''(0))^{1/4} Re^{-1/2} \frac{\varepsilon_W}{W}\end{aligned}$$

ここで $\varepsilon_W = v_0 (u_\tau / l_\tau)^2$ は壁近傍でのエネルギー散逸率、 $W = \tilde{f}_s \varphi_0$ は全エネルギー供給率の目安である。我々のモデルでは $\kappa \approx 0.36$ である。図9のデータは Laufer (1951), Wei & Willmarth (1989) によるものであるが、 $\kappa \approx 0.37$ であることを示している。Zanoun et al. (2004), Dean (1978) も同様の結果を得ている。(Zanoun et al. (2004) によれば $\kappa \approx 1/e$ 。) 図8は同時に、 κ が境界条件その他流れの状況によって微妙に変化することを示している。

$\kappa = O(1)$ は

$$\frac{\varepsilon_W}{W} = O\left(\left(1+2\phi''(0)\right)^{-1/4} Re^{1/2} \hat{d}\right)$$

ということである。壁近傍のエネルギー散逸はただかエネルギー供給率の程度だから $|\phi''(0)| \ll 1$ ならば

$$Re^{1/2} \hat{d} = O(1)$$

でなければならない。

カルマン定数の値は多くの実験で似たような値が報告され、カルマン普遍定数とも呼ばれる。この‘普遍性’を‘証明’する試みがあるが成功しているとはいえないようである (Frewer et al. 2014)。実際、対数関数が正しいとしても、乱流の種類でこの値は異なるとするのが妥当でありうるし、現象論的には対数関数以外の関数も可能である (Barenblatt 1993; George 2007; Marusic et al. 2010)。我々の観点からは、平均速度の関数形は採用する ϕ の近似形に依存するのであって、もしもべき関数を採用すれば速度分布としてべき乗の振る舞いが得られる。いわゆる‘対数領域’の関数形として何が正しいかという問題は物理学的には重要なものではない。

流れのエネルギー散逸はどのように起きているのかは、基本的にも応用上も非常に重要な問題である。レイノルズ数が小さいときは、層流を保ったまま運動量だけを交換するのは可能である。散逸の原因としては他に熱の伝導拡散があるが、圧縮膨張が無いときは一般に温度変動が小さいのでこれは考えなくてよい。

今の場合、プラントル数 β が 1 に近く、エネルギー散逸が主に ϕ の一すなわち渦による一拡散によって起きていることを暗示している。渦によるエネルギー拡散は、大きな渦が小さな渦へ、小さな渦はより小さな渦への変化という、渦の生成と消滅に伴って起きる。各段階の変化を引き起こす物理的原因は本質的に変わらないとすると、エネルギーの伝達についてのスケーリング仮説が成り立つ。コルモゴロフ理論 (Kolmogorov 1991, 1961) は、この仮説に基づいて伝達されるエネルギーの普遍的なスケール依存性を示し、実験的に確認されている。

u_z の符号は異なるが ω の方向が同じ渦管が生まれては散逸消滅するだろう。 u_z の符号が同じものが近くにあれば合体し渦管は成長する。たまたま成長できた渦管があれば、同じメカニズムでその近くに小さな渦管が生まれるだろう。こうして、大きな渦管から小さな渦管へとエネルギーが移動していく。これが、渦の拡散がエネルギーの散逸の直接的原因となり、プラントル数が 1 に近い値をとるといふことの意味である。

9.3. 円管乱流

円管内の流れに MDEVN を適用してみる。半径 R の円管の中心軸を z 軸とし、軸から半径外向きを r 方向とする極座標を採用する。 u_z と ϕ が r のみの関数として定常流の方程式を書き直すと

$$\begin{aligned} \phi \frac{1}{r} \partial_r (\hat{r} \partial_r \hat{u}_z) + \partial_r \phi \partial_r \hat{u}_z + \alpha &= 0 \\ \frac{1}{r} \partial_r (\hat{r} \partial_r \phi) - \frac{\beta}{2} (\partial_r \hat{u}_z)^2 + \frac{1}{2} (1 - \phi^2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。(円筒座標系での一般的な式は付録 B に与えておいた。) 無次元量は前と同様に定義している。 $\beta=1$ として、さまざまな α と $\phi_0 = \phi(0)$ の値について解を求めた結果を図 10 に示す。 ϕ_0 を 1 に近い値から順次小さい値に選び、それぞれについてできるだけ Laufer (1953) の実験 (Ferro 2012 も参照のこと) に近い分布を再現するように α を決めた。

$\beta=1$ の場合の円管流のモデルデータを表 2 に与える。

ϕ は z 軸上で 1 に近く、壁に近づくに従って急に減少する。解のかたち、特に軸方向の速度分布は ϕ_0 に敏感に依存する。図 10 では $\phi_0 = 0.974$ の場合が、カルマン定数を $\kappa \approx 0.39$ としてほぼ完璧に平均流の実験結果を再現する。モデルの単純さを考えるとこれは驚くべき事である。

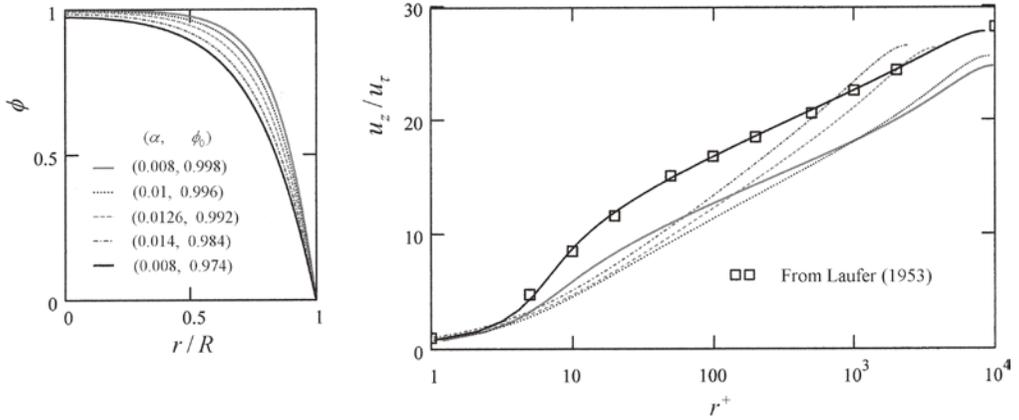


図 10. 円管流の渦粘性と流速分布。 $r^+ \equiv (R-r)/l_r$ 。 □ は $Re = 50000$ 。

表 2. 円管流の解のデータ: $\beta = 1$

α	$\phi(0)$	$\phi'(0)$	$\hat{u}(0)$	$\hat{u}'(0)$	\hat{u}_{\max}	\hat{d}	\hat{u}_r	\hat{l}_r
0.008	0.97	0	0.37	0	0.37	5.7	0.013	$6.7 \cdot 10^{-1}$

9.4. 有効粘性と渦粘性

MDEVМ の ϕ は、渦粘性モデルの渦粘性に対応する量である。しかし、あいにく MDEVМ はレイノルズ応力を含まないで、それと ϕ との関係はこのモデルの中で求めることはできない。したがって ϕ を渦粘性と考えてよいかはこのモデルの中では判断できない。しかし、渦粘性モデルで用いられるレイノルズ方程式と比べることで、なんらかの推測をすることはできる。このことを平行板乱流で見よう。レイノルズ方程式は次のようなものであった(第 2 節参照)：

$$\dot{\bar{u}} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} = -\overline{\delta u \cdot \nabla \delta u} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \frac{\nabla \bar{p}}{\rho} + f$$

ν は分子粘性である。今は左辺はゼロ。よって $\nabla \cdot \delta u = 0$ を使うと

$$-\partial_j R_{ij} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i - \frac{\partial_i \bar{p}}{\rho} + f_i = 0, \quad R_{ij} = \overline{\delta u_i \delta u_j}$$

となる。流れは x 方向にあり、平均については y 依存性だけを考えればよいとすると

$$-\partial_y R_{xy} + \nu \nabla^2 \bar{u}_x - \frac{\partial_x \bar{p}}{\rho} + f_x = 0$$

を得る。この式に ℓ_c^2/ξ_0 を掛け、 y/ℓ_c についての微分を'で表し、 $\bar{u} \equiv \bar{u}_x/\xi_0$ とおくと

$$-\frac{\ell_c}{\xi_0} R'_{xy} + v\bar{u}'' + v_0\alpha = 0, \quad \alpha \equiv \frac{\ell_c^2}{v_0\xi_0} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + f_x \right) \quad : \text{レイノルズ方程式}$$

となる。 $\ell_c = (\lambda_0/\lambda_1)^{1/2}$ である。他方、MDEVМ の運動方程式は

$$(\phi\bar{u}')' + \alpha = 0 \quad : \text{MDEVМ 方程式}$$

であった。この2つの式から α を消去すると

$$-\frac{\ell_c}{\xi_0} R'_{xy} = (v_0\phi - v)\bar{u}'' + v_0\phi'\bar{u}' = 0$$

となるが、これは容易に積分できて

$$-R_{xy} = v_0 \left(\phi - \frac{v}{v_0} \right) \frac{d}{dy} (\xi_0 \bar{u}) \quad (9.4.1)$$

となる。境界条件は流れの中央で $R_{xy} = 0$ である。 $v_0 \gg v$ のとき、この方程式はブシネスク仮説と同じ形になり、 $v_0\phi$ がまさに渦粘性そのものであることがわかる。この結論は、MDEVМ の \mathbf{u} がレイノルズ方程式の $\bar{\mathbf{u}}$ と同じであるという仮定に基づいていることに注意せよ。

レイノルズ方程式と MDEVМ 方程式を辺々引き算すると

$$-\frac{\ell_c}{v\xi_0} R'_{xy} + (1-\phi)\bar{u}'' - \phi'\bar{u}' + \left(\frac{v_0}{v} - 1 \right) \alpha = 0$$

を得る。1回積分して

$$-R_{xy} = -\frac{v\xi_0}{\ell_c} (1-\phi)\bar{u}' + \frac{(v_0-v)\alpha d\xi_0}{\ell_c^2} \left(1 - \frac{y}{d} \right) \quad (9.4.2)$$

ここで $y=d$ は2つの平行板の中間点である。前と同様、条件 $R_{xy}(y=d)=0$ を課した。右辺第1項は v に比例し従って $y=d$ 近辺で第2項に比べ非常に小さいであろう。こうして $y=d$ の近くで

$$-R_{xy} \sim 1 - y/d$$

となることがわかる。また、(9.4.1) との比較から、 \bar{u} は $y=d$ 近辺で y の2次関数であろうと推測できる。これらは実験的に知られている事実と矛盾しない (Kim et al. 1987; Pope 2000)。

以上のことより，我々の MDEVM は最小動力的渦粘性モデル *minimal dynamical eddy viscosity model* と呼ぶことも許されるであろう。

9.5. 圧縮性流体への拡張と天体円盤

これまで， $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を満たす非圧縮性の流体，すなわち液体を考えてきた。乱雑運動による分子粘性は圧縮性の気体にも存在するから，適当な拡張によって N-S 方程式は気体にも適用できるはずである。また，気体の乱流は地上や宇宙の自然現象のみならず工学的現象－エンジン内部や飛行体周辺－にも普通に観察され，かつしばしば圧縮率が高くマッハ数¹⁰ が大きい状態が実現している (Gatski and Bonnet 2013 ; Sellwood 2014) ので，このような拡張を試みることは十分に意味のあることである。

レイノルズ平均法による渦粘性モデルで圧縮性流体を扱うときは，速度の揺らぎの他に密度の揺らぎも考慮しなければならない。数値計算法との絡みで，密度重み平均（または Favre 平均）という量のまわりの揺らぎをとる方法が開発されている (Yoshizawa 1986 ; Gatski and Bonnet 2013 ; Germano et al. 2014)。このとき，密度の揺らぎを含む速度揺らぎの高次の平均が次々と現れるという新たな完結性問題が生じるので，それを打ち切るための仮定－モデル化－をして，方程式を有限の数に収める。これらの方程式が力学的に辻褓が合っているかはまた別の問題である。

我々の変分法の立場では，圧縮性は次のようにして定式化される。通常の圧縮性流体の方程式は，N-S 方程式で $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ の条件を外し，圧縮膨張効果を線形近似した運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$

で与えられる。ここで対称粘性応力テンソル σ_{ij} は

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \nu \left(\partial_j u_i + \partial_i u_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \zeta \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_j &\equiv \partial_i \sigma_{ij} = \nu \nabla^2 u_j + \left(\frac{\nu}{3} + \zeta \right) \partial_j \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

である (Landau and Lifshitz 1959)。これと質量保存条件

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

を組にして流体運動に適用するのが最も簡単な方法である。

¹⁰ 静止媒質中の物体の速度を音速で割った値。マッハ数が 1 を超えるといわゆる衝撃波が生じる。衝撃波の前面を境に，媒質の温度，圧力，密度が急激に変化する。

結局、圧縮性流体では新たに $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ という項が運動方程式に付け加わる。DEVm の立場では、この項を変分原理から導くラグランジュアン密度を Φ , ∇ , σ から作りたい。答は、 c_4 を実数として

$$L_{\text{com}} = \frac{ic_4}{8} \left((\text{Tr} \sigma \cdot \nabla \Phi^\dagger)^2 - (\text{Tr} \sigma \cdot \nabla \Phi)^2 \right)$$

である。これをこれまで扱ってきた非圧縮性流体の MDEVm に付け加えれば、最も簡単な圧縮性流体の MDEVm になる。Takahashi (2017b) はこのモデルを薄い回転円盤に適用し、流体の回転曲線として、遠方で一定になるものとケプラー運動を記述するものの 2 種類が可能であることを見出している。前者は渦巻き銀河 (Rubin and Ford 1970 ; Roberts and Rots 1973 ; Sofue and Rubin 2001), 後者は原始惑星雲 (de Gregorio-Monsalvo 2013 ; 百瀬 2017) の運動に対応するものである。

10. テンソルの導入とレイノルズ応力

前節で、2 行 2 列のスカラー複素行列場 Φ を用いて乱流の平均場理論としての MDEVm を不変性の要求を課すことで数学的に構成した。GL(2,C) の要素としての Φ は複素スカラー場と複素ベクトル場の成分に分解され、それぞれ複素渦粘性場と複素速度場という意味を持つ。

次に問題となるのは、複素テンソル場を導入したら何が起きるかということである。この問いは、乱流の理解にはレイノルズ応力や変形速度のようなテンソルが必要であり現象論的渦粘性モデルにはこれらのテンソルが自然に現れるが、MDEVm には含まれていないことからごく必然的なものであろう。数学的に導入されたテンソルは乱流物理の何に対応しうるのかを考えるのがこの節の目的である。

10.1. 複素ベクトル行列

回転のもとでテンソルとして振る舞う複素場の (i, j) 成分を R_{ij} で表す。 i, j は $1 (=x)$ から $3 (=z)$ の値をとる。 R_{ij} は並進とガリレイ変換および空間反転のもとで不変であるとする。これから次のような 2 行 2 列の複素ベクトル行列場をつくることができる：

$$R_i = R_{ij} \sigma_j, \quad \tilde{R}_i = \sigma_j R_{ji}$$

$$\text{Tr} R_i = \text{Tr} \tilde{R}_i = 0$$

ここでも、同じ項中の繰り返し添え字は和をとることを意味する。この R_i と \tilde{R}_i はもちろん独立ではないのでどちらか一方だけを使ってモデルを構成できるはずである。その際に、MDEVm を構成したときと同じ不変性の要求を課す。

ガリレイ変換で不変なラグランジュ微分を変分原理によって与える PA としては、 $\Phi = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ のとき、等式

$$\mathbf{u} \cdot \nabla R_i = \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\sigma}, \Phi \} \cdot \nabla R_i$$

から、単純には、

【例 1】

$$\begin{aligned} A_{R_i, Ld} &= i \int \left(R_{ij}^* \dot{R}_{ij} + \frac{1}{4} R_{ij}^* (\mathbf{u} + \mathbf{u}^*) \cdot \nabla R_{ij} - \frac{1}{4} \nabla R_{ij}^* \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{u}^*) R_{ij} \right) d\tau \\ &= i \int \text{Tr} \left(\frac{1}{2} R_i^\dagger \dot{R}_i + \frac{1}{8} R_i^\dagger \{ \boldsymbol{\sigma}, \Phi + \Phi^\dagger \} \cdot \nabla R_i - \frac{1}{8} \nabla R_i^\dagger \cdot \{ \boldsymbol{\sigma}, \Phi + \Phi^\dagger \} R_i \right) d\tau \end{aligned}$$

$d\tau \equiv d\mathbf{r}dt$ が考えられる。繰り返しの指標について和をとるものとする。この PA の変分を R_{ij}^* についてとると、 \mathbf{u} の実部を

$$\mathbf{v} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{u} + \mathbf{u}^*) = \text{Re} \mathbf{u}$$

とおいて、

$$\dot{R}_{ij} + \mathbf{v} \cdot \nabla R_{ij} + \frac{1}{2} R_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

となり、非圧縮性 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ のときのみラグランジュ微分に一致する。第 3 項もガリレイ変換で不変であるが、この項があるべき物理的理由は無い。しかし、ここでは非圧縮性流体を考えるので、この点で特に問題は生じない。

例 1 の PA は一見いささか複雑である。すぐに思いつくのは、これを単純化した

【例 2】

$$A_{R_i, Ld} = i \int \text{Tr} \left(\frac{1}{2} R_i^\dagger \dot{R}_i + \frac{1}{4} R_i^\dagger \Phi \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla R_i - \frac{1}{4} \nabla R_i^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \Phi^\dagger R_i \right) d\tau$$

を用いることであろう。これの R_i^\dagger についての変分をとると

$$\frac{1}{2} \dot{R}_i + \frac{1}{4} \Phi \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla R_i + \frac{1}{4} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla (\Phi^\dagger R_i) = \frac{1}{2} \dot{R}_i + \frac{1}{4} (\Phi \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \Phi^\dagger) \cdot \nabla R_i + \frac{1}{4} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \Phi^\dagger R_i$$

に比例する項が現れる。場を実数にすると、 $\Phi = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ のときこれは成分について

$$\dot{R}_{ij} + \mathbf{u} \cdot \nabla R_{ij} + \frac{1}{2} R_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} \omega_l R_{ik} + i R_{ij} \omega_j$$

を与える。ここで $\boldsymbol{\omega}$ は渦度

$$\omega_j = \varepsilon_{jkl} \partial_k u_l$$

である。最後の項は虚部なので 0 でなければならない：

$$R_{ij} \omega_j = 0$$

前節で考えたような平行板乱流では $\omega_x = \omega_z = 0$, $\omega_y \neq 0$ であるから、この条件は $R_{yy} = 0$ を与え、レイノルズ応力とは別の量となる。後で述べる理由もあるので、この節では例 1 を取り上げる。

R_{ij} を $\overline{\delta u_i \delta u_j}$ に対応するものと考え（そのように考えて良いか否かは実験との比較で決められるべきものである）と、平均流 \mathbf{u} と R_{ij} の相互作用として、N-S 方程式の移流項に起源を持つ $\partial_k v_j R_{ik} + \partial_k v_i R_{kj}$ の形のものも運動方程式の中に現れるはずである。そのような項を変分原理で生む PA としては

$$A_{R,adv} = i \int \left(R_{ij}^* \left(\partial_k v_j R_{ik}^* + \partial_k v_i R_{kj}^* \right) - c.c. \right) d\tau$$

を考えることができよう。実際、 R_{ij}^* について変分をとると

$$\partial_k v_j R_{ik}^* + \partial_k v_i R_{kj}^* + R_{ik}^* \partial_j v_k + R_{kj}^* \partial_i v_k$$

となり予想通りの項が現れるが、この場合最後の 2 項のお釣りも生じる。これは既に述べた作用反作用効果の現れなので、そのまま残しておく。 $A_{R,adv}$ を行列場を使って表すと

$$\begin{aligned} A_{R,adv} &= \frac{i}{2} \text{Tr} \int \left(R_{ij}^* \partial_k \Phi \left(\sigma_j R_{ik}^* + \sigma_i R_{kj}^* \right) - h.c. \right) d\tau \\ &= \frac{i}{2} \text{Tr} \int \left(\partial_k \Phi \left(R_i^\dagger R_{ik}^* + \tilde{R}_j^\dagger R_{kj}^* \right) - h.c. \right) d\tau \\ &= \frac{i}{4} \text{Tr} \int \left(\{ \sigma_k, \sigma_j \} \partial_j \Phi R_i^\dagger R_{ik}^* + \{ \sigma_k, \sigma_j \} \partial_j \Phi \tilde{R}_i^\dagger R_{ki}^* - h.c. \right) d\tau \\ &= \frac{i}{4} \text{Tr} \int \left(\{ R_i^\dagger, \sigma_j \} \partial_j \Phi R_i^\dagger + \{ \tilde{R}_i^\dagger, \sigma_j \} \partial_j \Phi \tilde{R}_i^\dagger - h.c. \right) d\tau \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\Phi \equiv (\Phi + \Phi^\dagger) / 2$ はエルミット行列である。最後の式は、将来、行列 R_i を $GL(2, \mathbb{C})$ で閉じるように拡張するとき有用になるが、当面の議論では第 1 行目の表現を用いる。他の相互作用を考える場合も、同様に R_i ではなく R_{ij} を用いることにする。また、

$\underline{\Phi}$ の成分 $\text{Re}\phi$, \mathbf{v} も $2\text{Re}\phi = \text{Tr}(\underline{\Phi})$, $2\mathbf{v} = \text{Tr}(\underline{\Phi}\sigma)$ より, それらを直接用いて不変 PA を書き下してよい。

$A_{\text{R,adv}}$ で Φ^\dagger の変分をとってみると

$$-\frac{i}{2}\partial_k \left[(\sigma_j R_{ik}^* + \sigma_i R_{kj}^*) R_{ij}^* \right] + \frac{i}{2}\partial_k \left[R_{ij} (\sigma_j R_{ik} + \sigma_i R_{kj}) \right]$$

という項が Φ の運動方程式に付け加わることが分かる。しかし R_{ij} が実数の時これは 0 である。すなわち, 上のモデル構成ではエルミット行列 $\underline{\Phi}$ を用いたため, Φ^\dagger の変分によって得られる \mathbf{u} と ϕ の運動方程式は, 実数空間では \mathbf{R} 場の影響を受けない。このことから, \mathbf{R} を考えるときは \mathbf{u} と ϕ は \mathbf{R} を含まない MDEV の段階で既に与えられたものと見なすことができる。これを取り上げた理由である。

これから残りの相互作用項を組み立てる。使うことのできる回転不変, ガリレイ変換不変因子はスカラー行列だけからなる $\text{Tr}\Phi$, $\text{Tr}(\nabla\Phi \cdot \sigma)$, $\text{Tr}(\nabla\Phi)^2$, ... に加えて

$$\text{Tr}(\mathbf{R}_i \sigma_i), \text{Tr}(\partial_i \mathbf{R}_i)^2, \text{Tr}(\mathbf{R}_i \partial_i \Phi), \text{Tr}(\mathbf{R}_i \sigma_i (\nabla\Phi)^2), \dots$$

などとその複素共役である。 Φ , Φ^\dagger は $\underline{\Phi}$ に含まれるものとする。

\mathbf{R}_i の拡散は

$$\begin{aligned} A_{\text{R,dif}} &= \frac{i}{4} \int \left(\text{Tr}(\eta \underline{\Phi} + \lambda) \left((\partial_k R_{ij}^*)^2 - (\partial_k R_{ij})^2 \right) \right) d\tau \\ &= \frac{i}{2} \int \left((\eta \text{Re}\phi + \lambda) (\partial_k R_{ij}^*)^2 - c.c. \right) d\tau \end{aligned}$$

で表されるだろう。次数の低いその他の可能な不変相互作用として考えられるのは

$$\begin{aligned} A_{\text{R}}^{(1)} &= \frac{i}{2} \int \left(g_0 (R_{kk}^*)^2 + g_1 (R_{ij}^*)^2 - c.c. \right) d\tau \\ A_{\text{R}}^{(2)} &= i \int \left(g_2 \text{Tr}(\mathbf{F} \partial_i \Phi \sigma_j) R_{ij}^* - c.c. \right) d\tau = i \int \left(g_2 \tilde{f}_j \partial_i \text{Re}\phi R_{ij}^* - c.c. \right) d\tau \\ A_{\text{R}}^{(3)} &= \frac{i}{4} \int \left((g_3 \text{Tr}\Phi + 2g_3') \text{Tr}(\partial_i \Phi \sigma_j) R_{ij}^* - c.c. \right) d\tau = i \int \left((g_3 \text{Re}\phi + g_3') \partial_i v_j R_{ij}^* - c.c. \right) d\tau \\ A_{\text{R}}^{(4)} &= i \int \left(M (\nabla\Phi) R_{kk}^* - c.c. \right) d\tau = i \int \left(\left(g_4 (\nabla \text{Re}\phi)^2 + (\nabla \mathbf{v})^2 \right) R_{kk}^* - c.c. \right) d\tau, \\ A_{\text{R}}^{(5)} &= \frac{i}{2} \int g_5 \text{Tr}(\partial_i \Phi \partial_j \Phi R_{ij}^* - c.c.) d\tau = i \int g_5 \left((\partial_i \text{Re}\phi \partial_j \text{Re}\phi + \partial_i v \cdot \partial_j v) R_{ij}^* - c.c. \right) d\tau. \end{aligned}$$

である。ここで, 結合定数 g_i , $i = 0 \sim 5$ と g_3' は実数である。 $M(\nabla\Phi)$ は $\nabla\Phi$ の関数で, ここ

では最も簡単な

$$M(\nabla\Phi) = \frac{g_4}{2} \text{Tr}(\nabla\Phi)^2 = g_4 \left((\nabla \text{Re}\varphi)^2 + (\nabla\mathbf{v})^2 \right)$$

を採用している。

$A_{\mathbf{R}}^{(1)}$ は R 場の慣性項である。 $A_{\mathbf{R}}^{(2)}$ は、体積力、圧力などの外力と粘性力による R 場の生成消滅を記述する。他の可能な相互作用のかたちは、比較的簡単なものを 3 次まで $A_{\mathbf{R}}^{(3)} \sim A_{\mathbf{R}}^{(5)}$ に与えた。 $A_{\mathbf{R}}^{(4)}$ は R との等方な相互作用を与える。 $A_{\mathbf{R}}^{(3,5)}$ の相互作用は非等方で、壁効果を記述する。

$A_{\mathbf{R},\text{adv}}$ から $A_{\mathbf{R}}^{(5)}$ までを全て足しあげて全 PA とする。スカラー行列の場合と同様、変分原理から得られた方程式で全ての場を実数としたものとしたが、 $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, $\Phi^\dagger = \Phi$, $R_{ij}^* = R_{ij}$ が物理的に意味がある運動方程式である。非圧縮性の条件の下で R_{ij} の運動方程式 - R 方程式と呼ぼう - は

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ij} + \mathbf{u} \cdot \nabla R_{ij} = & -\partial_k u_j R_{ik} - \partial_k u_i R_{kj} + \nabla \cdot \left((\eta\phi + \lambda) \nabla R_{ij} \right) - g_0 \delta_{ij} R_{kk} - g_1 R_{ij} - g_2 \tilde{f}_j \partial_i \phi \\ & - (g_3 \phi + g_3') \partial_i u_j - \delta_{ij} M(\nabla\Phi) - g_5 (\partial_i \phi \partial_j \phi + \partial_i \mathbf{u} \cdot \partial_j \mathbf{u}). \end{aligned}$$

添え字の繰り返しは和を意味する。

10.2. 対称成分と反対称成分

‘R 方程式’ は i と j に関し対称でない。対称成分と非対称成分 $S_{ij} \equiv (R_{ij} + R_{ji})/2$ と $A_{ij} \equiv (R_{ij} - R_{ji})/2$ は

$$\begin{aligned} \dot{S}_{ij} + \mathbf{u} \cdot \nabla S_{ij} = & -\partial_k u_j S_{ik} - \partial_k u_i S_{jk} + \nabla \cdot \left((\eta\phi + \lambda) \nabla S_{ij} \right) - g_0 \delta_{ij} S_{kk} - g_1 S_{ij} - \frac{g_2}{2} (\tilde{f}_i \partial_j \phi + \tilde{f}_j \partial_i \phi) \\ & - \frac{1}{2} (g_3 \phi + g_3') (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - \delta_{ij} M(\nabla\Phi) - g_5 (\partial_i \phi \partial_j \phi + \partial_i \mathbf{u} \cdot \partial_j \mathbf{u}), \\ \dot{A}_{ij} + \mathbf{u} \cdot \nabla A_{ij} = & -\partial_k u_j A_{ik} + \partial_k u_i A_{jk} + \nabla \cdot \left((\eta\phi + \lambda) \nabla A_{ij} \right) - g_1 A_{ij} \\ & + \frac{g_2}{2} (\tilde{f}_i \partial_j \phi - \tilde{f}_j \partial_i \phi) - \frac{1}{2} (g_3 \phi + g_3') (\partial_i u_j - \partial_j u_i). \end{aligned}$$

という方程式に従う。我々の関心は、 S_{ij} はレイノルズ応力に対応するか、 A_{ij} の意味は何か、にある。

u_i と S_{ij} の勾配、及び S_{ij} 自身が十分小さく、それらの 2 次以上の項を無視できると仮定しよう。すると S_{ij} の式は

$$-S_{ij} \approx \frac{g_2}{2g_1} (\tilde{f}_i \partial_j \phi + \tilde{f}_j \partial_i \phi) + \frac{1}{2g_1} (g_3 \phi + g_3') (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \frac{g_0}{g_1} \delta_{ij} S_{kk}$$

となる。 S_{ij} の非対角成分に対しては、この式はブシネスクの式に似ている。すなわち、 g_3 が 0 でないとき、 ϕ は渦粘性モデルにおける渦粘性と同様の役割を果たすことが期待される。ただし、 $\tilde{\mathbf{f}}$ を固定したとき回転対称性を破る右辺の第 2 項は、外力と有効粘性の直接の作用でも S_{ij} が生まれることを表している。この意味で、この式はブシネスク仮説を一般化したものになっている。

同様に、 A_{ij} について

$$A_{ij} \approx \frac{g_2}{2g_1} (\tilde{f}_i \partial_j \phi - \tilde{f}_j \partial_i \phi) - \frac{1}{2g_1} (g_3 \phi + g_3') (\partial_i u_j - \partial_j u_i)$$

という関係が得られる。右辺は意味は不明の第 1 項と、渦度を表すと考えられる第 2 項の和になっている。データと合わせると、対数領域から中心領域にかけて第 2 項の渦度項の方が大きいことが次節で分かる。よって、その領域で A_{ij} は実質的に有効粘性で補正された渦度を表すと考えられる。

S_{ij} の対角成分を全て足し合わせて（乱流運動エネルギーを表すと期待される） $K \equiv \sum_i S_{ii} / 2$ を考える。一様乱流を想定し、 S_{ij} は空間的に一定とする。この条件に合うように、速度場と粘性場について $u_i = w_{ij} r_j$ および $\phi = s_i r_i$ を仮定する。 w_{ij} が速度勾配の強さと方向を表す。すると

$$\dot{K} = -S_{ij} w_{ij} - (3g_0 + g_1) K - \frac{3g_4 + g_5}{2} (s^2 + w_{ij}^2) - \frac{g_2}{2} \tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{s}$$

を得る。他方、レイノルズ方程式から得られる対応する方程式は

$$\dot{K}^{(R)} = -\overline{\delta u_i \delta u_j w_{ij}} - \nu \overline{(\nabla \delta \mathbf{u})^2} + \overline{\delta \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}} \quad K^{(R)}$$

である。ここで指標 (R) と記号 δ はそれぞれレイノルズ方程式と乱流揺らぎを表す。この二つの式を比べると、右辺第 1 項を対応させて S_{ij} が速度勾配とレイノルズ応力による乱流エネルギー生成を表すと考えることができそうである。式の式の右辺第 2 項はエネルギー散逸率を表すが、その上の K 式ではこれを K 、速度勾配、粘性勾配で表すことができると仮定している ($3g_0 + g_1 > 0$ の条件の下で)。また、最後の項を比べると、一見 $\delta \mathbf{f}$ が $\tilde{\mathbf{f}}$ に比例し $\delta \mathbf{u}$ が粘性勾配に比例するような揺らぎ成分が主であると仮定していることになりそうである。しかし、平行板乱流ではこれは事実とそぐわない。 $\overline{\delta \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}}$ も速度勾配と粘性勾配の強さで表すという近似を取っていると見なすほうがまだ良さそうである。

R 方程式とレイノルズ方程式の大きな違いは、後者が 3 次モーメント項の存在によって閉じないのに対し、前者は自動的に閉じていることにある。MDEVm のある程度の成功が方程式が力学的に閉じていることにあるのなら、R 方程式である程度の成功が期待できる。本当にそうかを平行板乱流で見てみよう。

10.3. 平行板乱流

前節で構成したモデルを平行板乱流の空間構成に適用してみる。我々は、 R_{ij} と $\overline{\delta u_i \delta u_j}$ との関係に関心があるので、後者について知られている事を図 11 に提示しておく。この実験は $Re = 3300$ での直接数値シミュレーションの結果 (Kim et al. 1987) と良く整合していることが知られている。

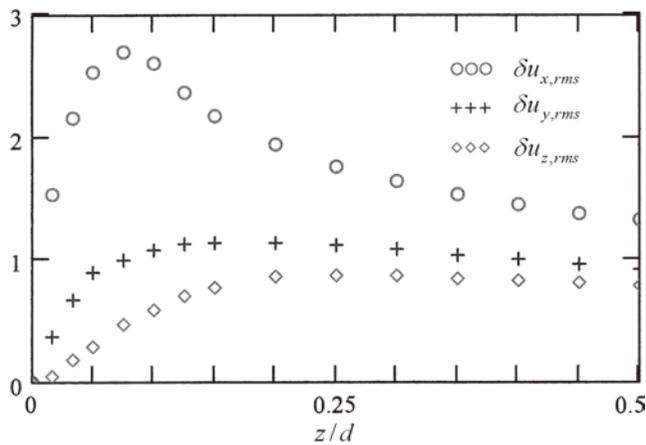


図 11. 平行板乱流 ($Re_c = \bar{u}_c d / \nu = 3755$) での $\delta u_{i,rms} = \overline{\delta u_i^2}^{1/2}$ の実験値 (西野・笠木 1990)。

平均流方向の速度変動が最も大きくまた壁近傍で鋭いピークがある。他方、壁に垂直な方向の変動が最も小さく、 $\delta u_{y,rms}$ はその中間の値をとる。直接数値シミュレーション (Kim et al. 1987; Abe et al. 2001; Dharmarathne et al. 2015) によれば、平行板の中間点では、平均流に垂直な 2 方向の速度変動はほぼ同じになるが、流れ方向の速度変動はそれよりも大きい値をとる (木田・柳瀬 1999)。

平均流を $\bar{\mathbf{u}} = (u_x, 0, 0)$ とする。平行板間隔の半分を単位として距離 y を測ると $0 \leq y \leq 1$ である。 $y=0$ に壁の一つがあるとすると。空間対称性より

$$S_{xz} = S_{zx} = S_{yz} = S_{zy} = 0$$

としよう。\$S_{ij}\$ の座標依存は \$y\$-依存性だけと仮定すると、残る対角成分と \$S_{xy}\$ が従う方程式は

$$\begin{aligned}
 & ((\eta\phi + \lambda)S'_{xx})' - 2u'_x S_{xy} - g_0 \Sigma - g_1 S_{xx} - M(\nabla\Phi) = 0, \\
 & ((\eta\phi + \lambda)S'_{yy})' - g_0 \Sigma - g_1 S_{yy} - M(\nabla\Phi) - g_5 (\phi'^2 + u_x'^2) = 0, \\
 & ((\eta\phi + \lambda)S'_{zz})' - g_0 \Sigma - g_1 S_{zz} - M(\nabla\Phi) = 0, \\
 & ((\eta\phi + \lambda)S'_{xy})' - u'_x S_{yy} - g_1 S_{xy} - \frac{g_2}{2} \tilde{f}_x \phi' - \frac{1}{2} (g_3 \phi + g_3') u'_x = 0, \\
 & ((\eta\phi + \lambda)A'_{xy})' - g_1 A_{xy} + \frac{g_2}{2} \tilde{f}_x \phi' + \frac{g_3}{2} \phi u'_x = 0.
 \end{aligned}$$

である。ダッシュは \$y\$ に関する微分を表す。また、\$S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} \equiv \Sigma\$ とした。

これらの方程式が、図 11 の実験結果を再現するようなパラメータ値はあるだろうか。この問題を、\$S_{yy}, S_{zz}, S_{xy}\$ および \$\Sigma\$ について考えることにする。

前の論文 (Takahashi 2017) で MDEVm を解析するとき、無次元の粘性関数を \$\varphi \equiv \phi / \xi_0\$ によって定義した。\$\xi_0\$ は速度の次元を有するパラメータで \$\phi\$ のポテンシャルの極小を与えるものであった。こうすると我々が関心のある物理現象については \$\varphi < 1\$ となる。ついでに、便宜上速度場についても

$$u_x \rightarrow \xi_0 u_x$$

として \$u_x\$ を無次元にしておく。方程式を \$\eta \xi_0\$ で割って

$$\begin{aligned}
 & ((\varphi + \bar{\lambda})\Sigma')' - \frac{2}{\eta} u'_x S_{xy} - (3\bar{g}_0 + \bar{g}_1)\Sigma - 3\bar{g}_4 (\varphi'^2 + u_x'^2) - \bar{g}_5 (\varphi'^2 + u_x'^2) = 0 \\
 & ((\varphi + \bar{\lambda})S'_{yy})' - \bar{g}_0 \Sigma - \bar{g}_1 S_{yy} - \bar{g}_4 (\varphi'^2 + u_x'^2) - \bar{g}_5 (\varphi'^2 + u_x'^2) = 0 \\
 & ((\varphi + \bar{\lambda})S'_{zz})' - \bar{g}_0 \Sigma - \bar{g}_1 S_{zz} - \bar{g}_4 (\varphi'^2 + u_x'^2) = 0 \\
 & ((\varphi + \bar{\lambda})S'_{xy})' - \frac{1}{\eta} u'_x S_{yy} - \bar{g}_1 S_{xy} - \frac{\bar{g}_2}{2} \tilde{f}_x \varphi' - \frac{1}{2} (\bar{g}_3 \varphi + \bar{g}_3') u'_x = 0
 \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\bar{\lambda} = \lambda / \eta \xi_0, \quad \bar{g}_{0,1} = g_{0,1} / \eta \xi_0, \quad \bar{g}_2 = g_2 / \eta, \quad \bar{g}_3 = g_3 \xi_0 / \eta, \quad \bar{g}'_3 = g'_3 / \eta, \quad \bar{g}_{4,5} = g_{4,5} \xi_0 / \eta$$

によって新しいパラメータを定義した。

実験 (Laufer 1951 ; Nishino and Kasagi 1990) で知られている \$u_x(y)\$ は直接数値計算の結果

果 (Kim et al. 1987) とよく合っている。同時に, MDEVN でもよく再現できている。スケールリングの性質より, これを普遍関数で表すことができる。普遍関数の近似式を付録 C に与えた。 $\varphi(y)$ も MDEVN において数値的に確定している (Takahashi 2017)。以下での計算では次の近似式を用いる:

$$\varphi(y) \approx 0.6 \sin(\pi y / 2d)$$

$S_{yy}, S_{zz}, \Sigma, S_{xy}$ を計算した結果を図 12 に示した。計算の結果は, $y > 0.3$ で実験とほぼ合っている。パラメータの値は図の説明に与えている。ただし, 他のパラメータ値も可能である。

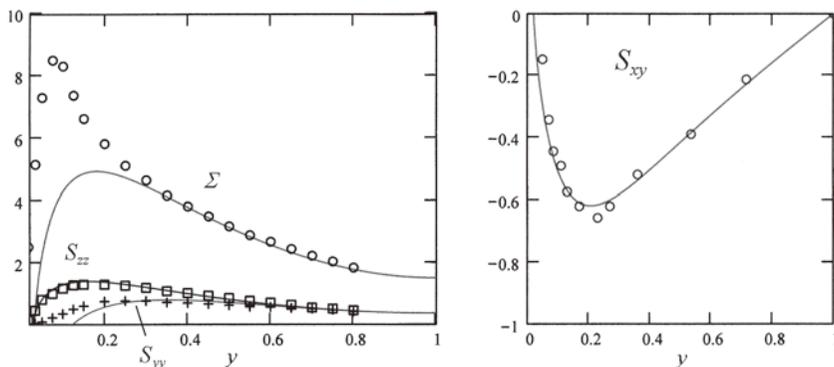


図 12. 解 (実線) の例。パラメータ値は $\bar{g}_0 = 6.67$, $\bar{g}_1 = 50$, $\bar{g}_2 \bar{f}_x = -142$, $\bar{g}_3 = 40$, $\bar{g}_3' = 39$, $\bar{g}_4 = -1.7$, $\bar{g}_5 = -1.5$, $\bar{\lambda} = 7$, $\eta = 1$ 。境界条件は $y = 1$ で $S_{yy} = S_{zz} = 0.36$, $\Sigma = 1.5$, $S'_{yy} = S'_{zz} = \Sigma' = 0$, $S_{xy} = 0$, $S'_{xy} = 0.78$ 。左図: 記号は Nishino and Kasagi (1990) の $Re_c = 3755$ のデータで, $\overline{\delta u^2}$ (円), $\overline{\delta u_x^2}$ (四角) および $\overline{\delta u_y^2}$ (十字) を表す。右図: 円は Wei and Willmarth (1989) から取ったもので $Re_c = 2970$ での $\overline{\delta u_x \delta u_y}$ を表す。

S_{yy} と S_{zz} は $y = 1$ での同じ境界条件で求められた。両者の違いは \bar{g}_5 項があるかどうかにある。 S_{zz} が全体的にデータと合っているのは, S_{yy} が壁からの影響を受けにくいことによるのだろう。

10.4. 高次効果

Σ と S_{yy} のレイノルズ応力からのずれは $y < 0.3$ で著しい。このことは, 我々のモデルが壁効果を正しく取り入れていないことを意味する。図 12 より, S_{xx} と S_{yy} の速度勾配との相互作用を取り入れることでこの食い違いが改善されると思われる。最も簡単な相互作用として $iF(\nabla \Phi) R_{ij}^* \partial_k v_i \partial_k v_j$, $iG(\nabla \Phi) R_{ij}^* \partial_i Re \phi \partial_j Re \phi$, $iH(\nabla \Phi) R_{ij}^* \partial_i v_k \partial_j v_k$ とそれらの複素共役が候補としてあげられる。ここでは次のようなものを考える:

$$F = g_6 (\nabla \text{Re} \phi)^2, \quad G = g_7 (\nabla \text{Re} \phi)^2$$

それぞれ S_{xx} と S_{yy} に大きな壁効果を与えると考えられる。これに伴い、 Σ と S_{yy} の式は次のように変更される：

$$((\varphi + \bar{\lambda})\Sigma')' - \frac{2}{\eta} u'_x S_{yy} - (3\bar{g}_0 + \bar{g}_1)\Sigma - 3\bar{g}_4(\varphi'^2 + u_x'^2) - \bar{g}_5(\varphi'^2 + u_x'^2) - \bar{g}_6\varphi'^2 u_x'^2 - \bar{g}_7\varphi'^4 = 0$$

$$((\varphi + \bar{\lambda})S'_{yy})' - \bar{g}_0\Sigma - \bar{g}_1 S_{yy} - \bar{g}_4(\varphi'^2 + u_x'^2) - \bar{g}_5(\varphi'^2 + u_x'^2) - \bar{g}_7\varphi'^4 = 0$$

ここで $\bar{g}_{6,7} = g_{6,7}\xi_0^3/\eta$ 。これに S_{zz} と S_{xy} の式を連立させて解いた結果が図 13 である。パラメータ値は図の説明中に与えている。予想通り、データと良く合う領域は壁に向かって広がっている。 S_{xy} には目に見えるほどの変化はないのでここには示していない。

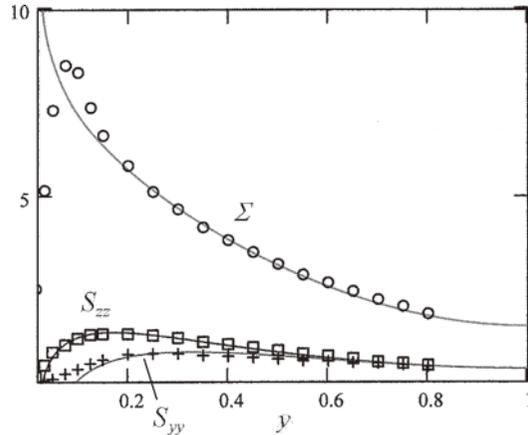


図 13. 新しい g_6, g_7 項を加えたときの計算結果。曲線と記号の意味は図 12 と同じ。用いたパラメータは $\bar{g}_0 = 6.67$, $\bar{g}_1 = 50$, $\bar{g}_2 \tilde{f}_x = -120$, $\bar{g}_3 = -40$, $\bar{g}_3' = 39$, $\bar{g}_4 = -1.8$, $\bar{g}_5 = -1.5$, $\bar{g}_6 = 4.6$, $\bar{g}_7 = 90$, $\bar{\lambda} = 7$, $\eta = 1$ 。境界条件は図 12 と同じ。

ここまでの解析で、対称テンソル S_{ij} は平行板乱流で実験的に知られているレイノルズ応力の振る舞いを半定量的に再現することが分かった。ただし、壁付近では問題が残されている。

最後に、反対称テンソル成分 A_{xy} の振る舞いを図 14 に示す。ここでは、 $y=1$ で $A_{xy} = 0$, $A'_{xy} = 1.3$ という境界条件を用いている。前節で予想したように、壁から離れたところで A_{xy} はほぼ渦度に比例すると見てよい。(ただし、 A_{xy} の振る舞いは境界条件に敏感に依存する。もしも $A_{xy} = A'_{xy} = 0$ という条件を採用すると、 $0.3 < y < 1$ で絶対値が非常に小さい値をとる。)

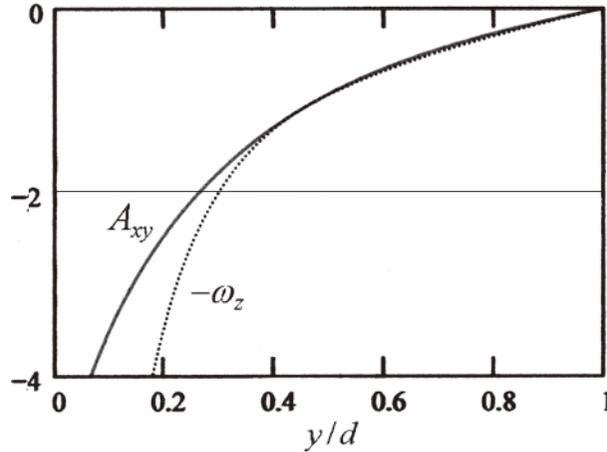


図 14. A_{xy} の例(実線)。境界条件は $y=1$ で $A_{xy}=0$, $A'_{xy}=1.3$ 。モデルパラメータは図 12 と同じ。
 $-\omega_z$ と記した点線は $(g_3\phi + g'_3)u'_x / 2g_1$ を表す。

11. ま と め

本稿では、変分原理に基づいた乱流の場の理論を構成する方法について論じた。発端は「渦のパラドックス」(高橋 2015a) の解決のヒントを与えた粘性反転不変性にある(高橋 2014b)。乱流研究の主導的方法を顧みても粘性を場とみなすことは自然なのだが、本稿では力学の基本原理に背くことがない粘性場と流れの相互作用を見つけることで、粘性場の理論を構成できるか否かを検討した。

力学的に辻褃のあった理論は変分原理に基づいて構成できる。無粘性流体の変分原理は昔からよく知られていた。ただし、その発見の歴史は単純ではない。まず非回転の流れについて(Eckart 1938)、次いで 25 年後に一般の流れについて(Lin 1963)の変分原理が見つかったのである。

これに反し、粘性流体の力学は標準的な変分原理と相容れない。数学的興味から確率論的構成法が議論されているが、N-S 方程式の決定論的性格との整合性が無く、自然現象への適用の利便性も殆ど無いように見える。

N-S 方程式を、拘束条件を巧みに使って変分原理から導くことができる(Fukagawa & Fujitani 2012, Yourgrau & Mandelstam 1968)。ただし、その場合の変分は有効 Action の全微分にはなっていない。導出の手続きも、オイラー方程式のときのように、少々込み入っている。

本論文では、まず N-S 方程式の変分原理を標準的方法 - Action = 運動エネルギー - 位置エ

エネルギーとする ω とは異なる仕方で構成した。具体的には、Action を構成するのにラグランジュ未定乗数法と密接に関連する方法を用いたということである。それを pseudoaction (PA) と呼ぶことにした。ただし、原始的なラグランジュ未定乗数法ではなく、実ベクトル場を複素場に拡張し、3成分ベクトル場を $GL(2,C)$ の要素 = 2行2列の行列として統合するという方法を採用した。これにより、N-S 方程式が対称性を満たす変分原理から導かれるのみならず、スカラー場を数学的に自然にかつ無理なく導入する道筋がつけられた。導入されたスカラー場は輸送方程式に従う。

スカラー場を含む行列場を用いて、PA にはさまざまな相互作用項を新たに付け加えることができる。それらの項は、流体運動の一般的性質を考慮しながら決めることができる。そのなかで最も単純な構造の PA を用い、変分原理を適用して運動方程式を導くと、それは乱流を記述する現象論的な渦粘性モデルとよく似た構造を持っていることが判明した。スカラー場は基本的に渦粘性と同じ役割を果たすのである。新しく得られたこの力学系を最小渦粘性平均場モデル MDEVM と名付けた。MDEVM の構造は、従来の渦粘性モデルに比べ非常に単純であるにも関わらず、実験室で観測される平均現象をよく再現する。平均速度場の普遍性については、カルマン定数が境界条件に依存することも、我々のモデルの中で判明した。また、圧縮性の回転流体に適用すると、観測された銀河の回転曲線や原始惑星雲の Kepler 運動を矛盾しない結果が得られることも、MDEVM が正しい方法論を提供していることを示唆するものである (Takahashi 2017b)。

ただし、MDEVM は初めから平均場を用いているため、レイノルズ応力を計算することはできない。一つの方法はレイノルズ方程式を援用することであり、そうするとやはり実験と整合する結果が得られる (Takahashi 2016)。

レイノルズ応力を扱うために、テンソルから $GL(2,C)$ に属するベクトル行列場をつくり、PA を構成することが考えられ、実際それは形式的に可能であることを 10 節で示した。平行板乱流の簡単なモデルについてテンソル場の運動方程式を解いてみると、テンソル場はレイノルズ応力に対応させることができることが分かった。ただし、レイノルズ応力そのものではない。また、10 節で導入したベクトル行列場は $GL(2,C)$ の中で閉じないという不満が残る。したがって次のように $GL(2,C)$ の中心を有するようなモデルの拡張が必要となるだろう：

$$R_i = \omega_i + R_{ij}\sigma_j$$

R_i が空間反転の固行列とすれば、 R_{ij} が空間反転について偶なので ω も偶-擬ベクトルである。流体運動では例えば渦度がそのような性質を持っている。レイノルズ応力の相互作用から平均流の渦度とは別の渦度が生じるというのはもっともらしく、このとき R 方程

式がどのような解を与えるかは興味深い。これも将来の課題である。 $GL(2, C)$ の中心がある場合の運動方程式の形を付録 D に与えておく。

こうして、乱流の平均場理論を変分原理から構成することはできそうであることが分かった。このときに指針となるのは、理論の対称性－回転不変性とガリレイ変換不変性－であったが、本稿で述べた構成法に従えばこの点は自動的に保証される。PA の各項を NS 方程式から導き出すことができれば一番望ましいのだが、これは非常にむずかしい。

残された問題の一つは、上に述べたように、渦度場を基本量とする平均場理論をつくれるかということである。乱流が渦度によって支配され決定されるらしいことを思えば、これは最も興味ある問題である。

計算された平均場が安定かどうかにも気になるところである。もしも不安定ということがあれば、位相空間上の不安定領域を特定しなければならない。これは困難であるが興味深い問題であろう。また、他の系への適用が可能かも調べる必要がある。例えば 2 重円筒のテイラー乱流が (M) DEVM で記述できるだろうか。

MDEVM で導入された行列場は、スカラー場が空間反転に対して符号を変えないとすると、定まったパリティを持たない。符号を変えると定義するとパリティの固有関数になるが、3 次の相互作用項－第 9 節の $L^{(3)}$ －がパリティを破る。これは、MDEVM が N-S 方程式と質的に異なるところである。このことは、乱流の本質と関係があるのだろうか。

我々の PA の方法では、初めにすべての場の量を複素数と見なす。虚部は運動方程式を導くための補助的な変数とされ、最終的にはこれを 0 にする。虚部は凝集的で一見非現実的だからである。しかし、元の正準方程式には虚部も実部と対等に現れるので、このことは理論の対称性を手で破ることを意味し、いささか気持ちが悪い。本当は虚部にも物理的な意味があり、それを見つけることができているだけではないのか。もしもこの問題が肯定的に解決されれば、PA の方法は全く新しい展開を見せることになるだろう。

付録 A 粘性係数の分子運動論的説明

ここでは、粘性および粘性係数の分子運動論的な説明をまとめておく。教科書（多田 1967；Sears 1972）にあるように、粘性係数は速度が空間依存的であるとき、流体のある部分が相互に及ぼし合う力が速度勾配に比例するとしてその比例係数のことをいう（例えば、谷 1967）。図 A1 では、水平の流れの底に静止した板が置かれていて、流れ方向に力を受けている様子を描いている。流体も遅い部分は速い部分から引っ張られる。速い部分は遅い部分から引き戻される。

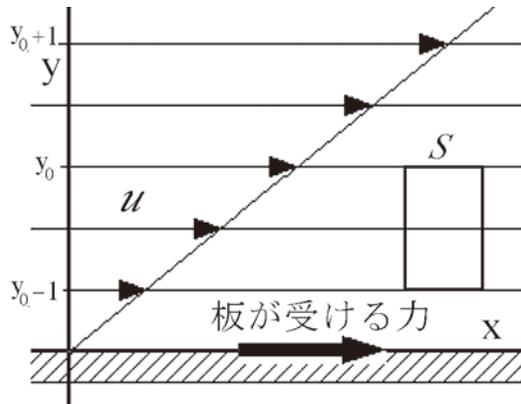


図 A1. x 方向の流れの速さ u に y 依存性がある場合。

生じる力が速度差に比例するとしてその比例係数を粘性係数という。板が単位面積あたり受ける x 方向の力を τ_0 とすると、今の場合

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy}$$

であり、この μ が粘性係数である。

底面が $y = y_0$ のところにある、底面積が S で高さが l の柱を考える。面 S を単位時間に下から上に（または上から下に）貫く分子の数を N とする。非常に粗く見積もって、それらの分子の x 方向の速度はすべて $u(y_0) - l du/dy$ （または $u(y_0) + l du/dy$ ）程度とすると、差し引き

$$\Delta P = 2Nlm \frac{du}{dy}$$

の運動量の変化が考えている柱に生じる。ここで m は分子の質量である。単位時間に生じる運動量の変化が力であるから $\tau_0 = \Delta P/S$ であり、これと上の 2 式を比較して

$$\mu = \frac{2N}{S} lm$$

となる。 N/S は単位面積を貫く分子の数である。全運動量は保存するので、作用反作用の法則は厳密に成り立っている。

話をさらに簡単化して、全分子の $1/3$ が y 方向に速さ \bar{c} - 平均速度と考えるのが適当 - で揃って動いていてそのうちの半分が下から上に運動しているとする

$$\frac{N}{S} = \frac{n\bar{c}}{6}$$

である。したがって

$$\mu = \frac{1}{3}nlm\bar{c}$$

これらの分子が全て柱から出る（または入る）には l を平均自由行程程度としなければならない。より厳密な見積もりでは係数 $1/3$ は $1/2$ で置き換えられる。最後の式は、ニュートン力学の第 2 法則と統計を考慮して導かれたことに注意せよ。

付録 B 円筒座標系における MDEV 方程式—粘性流体—

$$\begin{aligned} \partial_t u_r + u_r \partial_r u_r + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_r + u_z \partial_z u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = & -\frac{1}{2} \partial_r \varphi^2 - \frac{1}{\rho} \partial_r p + f_r \\ & + c_3 \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \varphi \partial_r u_r) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta (\varphi \partial_\theta u_r) - \frac{u_\theta}{r^2} \partial_\theta \varphi - \frac{\varphi}{r^2} (2 \partial_\theta u_\theta + u_r) + \partial_z (\varphi \partial_z u_r) \right] + c_4 \partial_r \nabla \cdot \mathbf{u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t u_\theta + u_r \partial_r u_\theta + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_\theta + u_z \partial_z u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = & -\frac{1}{2r} \partial_\theta \varphi^2 - \frac{1}{\rho r} \partial_\theta p + f_\theta \\ & + c_3 \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \varphi \partial_r u_\theta) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta (\varphi \partial_\theta u_\theta) + \frac{u_r}{r^2} \partial_\theta \varphi + \frac{\varphi}{r^2} (2 \partial_\theta u_r - u_\theta) + \partial_z (\varphi \partial_z u_\theta) \right] + c_4 \frac{1}{r} \partial_\theta \nabla \cdot \mathbf{u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t u_z + u_r \partial_r u_z + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_z + u_z \partial_z u_z = & -\frac{1}{2} \partial_z \varphi^2 - \frac{1}{\rho} \partial_z p + f_z \\ & + c_3 \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \varphi \partial_r u_z) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta (\varphi \partial_\theta u_z) + \partial_z (\varphi \partial_z u_z) \right] + c_4 \partial_z \nabla \cdot \mathbf{u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi + \partial_r (\varphi u_r) + \frac{1}{r} \partial_\theta (\varphi u_\theta) + \partial_z (\varphi u_z) = & \lambda_0 \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \partial_z^2 \right) \varphi + \frac{\lambda_1}{2} (\xi_0^2 - \varphi^2) \\ & - \frac{c_3}{2} \left[(\partial_r u_r)^2 + (\partial_r u_\theta)^2 + (\partial_r u_z)^2 + \frac{1}{r^2} \left((\partial_\theta u_r - u_\theta)^2 + (\partial_\theta u_\theta + u_r)^2 + (\partial_\theta u_z)^2 \right) \right] \\ & - \frac{c_3}{2} \left[(\partial_z u_r)^2 + (\partial_z u_\theta)^2 + (\partial_z u_z)^2 \right]. \end{aligned}$$

付録 C 平行板乱流における平均速度場の経験式

無次元座標 $\zeta = y/2d$ の領域を 3 つに分け、平均速度場 $\zeta = y/2d$ を考える。

i) 粘性底層 + 遷移領域 $\zeta \leq \zeta_1$:

$$u(\zeta) = A \sin(\zeta / A).$$

ii) 遷移領域 + 対数領域 $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$:

$$u(\zeta) = (2.4 \ln \zeta + 5.5) [1 - B \exp(-C(\zeta - \zeta_1))].$$

iii) 中心領域 $\zeta_2 \leq \zeta \leq \zeta_{\max}$:

$$u(\zeta) = D - E(\zeta_{\max} - \zeta)^2.$$

$u(\zeta)$ が C^1 級であることを条件として課すと, A, B, C, D, E に対する以下の条件式を得る。

$$B(A) = 1 - A \sin(\zeta_1 / A) / Fl(\zeta_1),$$

$$C(A) = \frac{\cos(\zeta_1 / A) - (2.4 / \zeta_1)(1 - B(A))}{B(A) Fl(\zeta_1)},$$

$$D(A) = Fl(\zeta_2) (1 - B(A) \exp[-C(A)(\zeta_2 - \zeta_1)]) + E(A) (\zeta_{\max} - \zeta_2)^2,$$

$$E(A) = \frac{1}{2(\zeta_{\max} - \zeta_2)} \left[\frac{2.4}{\zeta_2} + B(A) \left(Fl(\zeta_2) C(A) - \frac{2.4}{\zeta_2} \exp[-C(A)(\zeta_2 - \zeta_1)] \right) \right].$$

ただし

$$Fl(\zeta) = 2.4 \ln \zeta + 5.5$$

である。本文では次の数値を用いた。

$$\zeta_1 = 10, \quad \zeta_2 = \zeta_{\max} / 2, \quad \zeta_{\max} = 450, \quad A = 15.$$

付録 D スカラー・ベクトル系の運動方程式 - φ, ω がある場合 -

10.1 節のモデル【例 1】で $GL(2, C)$ の中心 φ, ω がある場合を考える。

ラグランジュ微分項を与えるラグランジュアン密度は、本文で述べた

$$A_{R, Ld} = i \int \text{Tr} \left(\frac{1}{2} R_i^\dagger \dot{R}_i + \frac{1}{8} R_i^\dagger \{ \sigma, \Phi + \Phi^\dagger \} \cdot \nabla R_i - \frac{1}{8} \nabla R_i^\dagger \cdot \{ \sigma, \Phi + \Phi^\dagger \} R_i \right) d\tau$$

で、本文で述べたように Φ 運動方程式は変わらず、 R 運動方程式への寄与は

$$\dot{R}_i + \frac{1}{2} \{ \sigma, \Phi + \Phi^\dagger \} \cdot \nabla R_i + \frac{1}{4} \nabla \cdot \{ \sigma, \Phi + \Phi^\dagger \} R_i$$

である。 $\Phi = \varphi + u_j \sigma_j$, $R_i = \omega_i + R_{ij} \sigma_j$ を代入して場を実数として, $(1, \sigma)$ を基底としたときの展開係数を求めると (変分で表れる実部だけを残して)

$$\omega: \dot{\omega}_i + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_i + \varphi \partial_j R_{ij} + \frac{1}{2} (\omega_i \nabla \cdot \mathbf{u} + \partial_j \varphi R_{ij})$$

$$R: \dot{R}_{ij} + \mathbf{u} \cdot \nabla R_{ij} + \varphi \partial_j \omega_i + \frac{1}{2} (\partial_j \varphi \omega_i + \nabla \cdot \mathbf{u} R_{ij})$$

となる。

本文では PA に次の移流項も導入した:

$$A_{R,adv} = \frac{i}{4} \text{Tr} \int \left(\{R_i^\dagger, \sigma_j\} \partial_j \Phi R_i^\dagger + \{\tilde{R}_i^\dagger, \sigma_j\} \partial_j \Phi \tilde{R}_i^\dagger - h.c. \right) d\tau$$

Φ , R_i に中心 φ , ω を導入して得られる関係式

$$\{R_i^\dagger, \sigma_j\} = 2\omega_i^* \sigma_j + 2R_{ij}^*, \quad \{\tilde{R}_i^\dagger, \sigma_j\} = 2\omega_i^* \sigma_j + 2R_{ji}^*$$

を代入して

$$A_{R,adv} = i \int \frac{1}{2} \text{Tr} \left((\omega_i^* \sigma_j + R_{ij}^*) \partial_j \Phi R_i^\dagger + (\omega_i^* \sigma_j + R_{ji}^*) \partial_j \Phi \tilde{R}_i^\dagger - h.c. \right) d\tau$$

積分記号内括弧の第 1 項は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Tr} \left((\omega_i^* \sigma_j + R_{ij}^*) (\partial_j \varphi^* + \partial_j v_k \sigma_k) (\omega_i^* + R_{il}^* \sigma_l) \right) \\ & = 2R_{ij}^* \partial_j \varphi^* \omega_i^* + \omega_i^{*2} \nabla \cdot \mathbf{v} + R_{ij}^* \partial_j v_k R_{ik}^* + i \varepsilon_{jkl} \omega_i^* \partial_j v_k R_{il}^* \end{aligned}$$

同様に括弧第 2 項は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Tr} \left((\omega_i^* \sigma_j + R_{ji}^*) \partial_j v_k \sigma_k (\omega_i^* + R_{il}^* \sigma_l) \right) \\ & = 2R_{ji}^* \partial_j \varphi^* \omega_i^* + \omega_i^{*2} \nabla \cdot \mathbf{v} + R_{ji}^* \partial_j v_k R_{ki}^* + i \varepsilon_{jkl} \omega_i^* \partial_j v_k R_{il}^* \end{aligned}$$

それぞれの最後の項は, 場を実数にしたときに運動方程式に寄与しないので無視しできる。

ω_i^* , R_{ij}^* で変分を取り, 場を実数にする (したがって $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}$) と, 運動方程式への $A_{R,adv}$ からの寄与としてそれぞれ

$$\omega: 2(R_{ij} + R_{ji}) \partial_j \varphi + 4\omega_i \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$R: 2(\partial_j \varphi \omega_i + \partial_i \varphi \omega_j) + (\partial_j u_k + \partial_k u_j) R_{ik} + (\partial_i u_k + \partial_k u_i) R_{kj}$$

という項を与える。

本文で扱われた他の PA 項についても, 参考のために拡張形を与えておく。そのために,

中心がない行列に対する拡張後の次の関係式を用いる：

$$2R_{ii} = \text{Tr}(\mathbf{R}_i \boldsymbol{\sigma}_i) \rightarrow 2R_{ii}, \quad 2(\mathbf{R}_{ij})^2 = \text{Tr}(\mathbf{R}_i^2) \rightarrow 2(\boldsymbol{\omega}^2 + (\mathbf{R}_{ij})^2)$$

そこで、PA と運動方程式 (EM) への寄与は

$$\begin{aligned} \text{PA:} \quad A_{\mathbf{R}}^{(1)} &= \frac{i}{2} \int \left(g_0 (\mathbf{R}_{ii}^*)^2 + g_1 (\mathbf{R}_{ij}^*)^2 + g_2 R_{ii}^* (\mathbf{R}_{kl}^*)^2 - c.c. \right) d\tau \\ &\rightarrow \frac{i}{2} \int \left(\frac{g_0}{4} (\text{Tr}(\mathbf{R}_i^\dagger \boldsymbol{\sigma}_i))^2 + \frac{g_1}{2} \text{Tr}(\mathbf{R}_i^\dagger)^2 + \frac{g_2}{4} \text{Tr}(\mathbf{R}_i^\dagger \boldsymbol{\sigma}_i) \text{Tr}(\mathbf{R}_i^\dagger)^2 - c.c. \right) d\tau \\ &= \frac{i}{2} \int \left(g_0 (\mathbf{R}_{ii}^*)^2 + g_1 (\boldsymbol{\omega}^{*2} + (\mathbf{R}_{ij}^*)^2) + g_2 R_{ii}^* (\boldsymbol{\omega}^{*2} + (\mathbf{R}_{ij}^*)^2) - c.c. \right) d\tau \\ &\quad \boldsymbol{\omega}: (g_1 \boldsymbol{\omega}_i + g_2 \mathbf{R}_{ij}) \boldsymbol{\omega}_i \\ &\quad R: g_0 R_{kk} \delta_{ij} + g_1 R_{ij} + \frac{g_2}{2} (\boldsymbol{\omega}^2 + (\mathbf{R}_{ij})^2) \delta_{ij} + g_2 R_{kk} R_{ij} \end{aligned}$$

同様に

$$\text{PA:} \quad A_{\mathbf{R}}^{(2)} \rightarrow i \int \left(g_4 (\nabla \varphi)^2 + (\partial_i u_j)^2 + g_5 (\nabla \varphi)^2 \right) (\mathbf{R}_{ii}^* - c.c.) d\tau$$

ω_i^* , R_{ij}^* で変分をとれば運動方程式への寄与が得られる (本文に述べた理由により, φ と \mathbf{u} の変分を取る必要はない)。結果は

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\omega}: 0 \\ &R: \left((g_4 + g_5) (\nabla \varphi)^2 + g_4 (\partial_k u_l)^2 \right) \delta_{ij} \\ \text{PA:} \quad A_{\mathbf{R}}^{(3)} &\rightarrow \frac{ig_6}{4} \int \left(\text{Tr} \left((\boldsymbol{\omega}_i^* + R_{ij}^* \boldsymbol{\sigma}_j) \boldsymbol{\sigma}_k (\boldsymbol{\omega}_i^* + R_{il}^* \boldsymbol{\sigma}_l) \partial_k (\varphi + u_m \boldsymbol{\sigma}_m) \right) - c.c. \right) d\tau \\ &= \frac{ig_6}{2} \int \left(R_{ij}^* \omega_i^* \partial_j \varphi + \omega_i^* R_{ik}^* \partial_k \varphi + \omega_i^* \omega_i^* \partial_k u_k + \frac{1}{2} \text{Tr} \left(R_{ij}^* \boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma}_k R_{il}^* \boldsymbol{\sigma}_l \partial_k u_m \boldsymbol{\sigma}_m \right) - c.c. \right) d\tau \\ &= ig_6 \int \left(R_{ij}^* \omega_i^* \partial_j \varphi + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{*2} \nabla \cdot \mathbf{u} + R_{ij}^* R_{il}^* \partial_j u_l - \frac{1}{2} R_{ij}^* R_{ij}^* \partial_k u_k - c.c. \right) d\tau \\ &\quad \boldsymbol{\omega}: R_{ij} \partial_j \varphi + \omega_i \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &\quad R: \omega_i \partial_j \varphi + R_{il} (\partial_j u_l + \partial_l u_j) - R_{ij} \partial_k u_k \end{aligned}$$

10.2 節で行った R_{yy} の見積もりでは $g_2=0$ のモデルを用いた。このときは, R_i に $\boldsymbol{\omega}$ を含めても R_{yy} の方程式に変更はない。従って, 10.2 節での R_{yy} の結果に変更は生じない。

参考文献

- Abe H, Kawamura H and Matsuo Y, 2001, Direct numerical simulation of a fully developed turbulent channel flow with respect to the Reynolds number dependence *ASME J. Fluid Eng.* **123**, 382.
- Bailly C and Comte-Bellot G, 2015, *Turbulence* (Springer, London), Chap. 9.
- Barenblatt G I, 1993, Scaling laws for fully developed turbulent shear flows. Part 1. Basic hypotheses and analysis *J. Fluid Mech.* **248**, 513.
- Bateman H, 1931, On dissipative systems and related variational principles *Phys. Rev.* **38**, 815.
- Bershadler D, 1995, Compressible vortices in *Fluid vortices* (ed. Green, Kluwer Academic Pub.) 291.
- Boussinesq J, 1877, Essai sur la theorie des eaux courantes *Mém. Acad. Paris Sci.* **23**, 1.
- Bredberg J, 2001, On two-equation eddy-viscosity models *Internal Report 01/8, Chalmers Univ. of Tech.* (Available at : http://www.tfd.chalmers.se/~lada/postscript_files/jonas_report_lowre.pdf), [retrieved February 1, 2016].
- Burgers J M, 1948, A mathematical model illustrating the theory of turbulence *Adv. Appl. Mech.* **1** 171.
- Chen S, Foias C, Holm D D, Olson E, Titi E S and Wynne S, 1998, Camassa-Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5338.
- Cipriano F and Cruzeiro A B, 2007, Navier-Stokes equation and diffusions on the group of homeomorphisms of the torus *Comm. Math. Phys.* **275**, no. 1, 255.
- Constantin P and Iyer G, 2008, A stochastic Lagrangian representation of the 3-dimensional incompressible Navier-Stokes equations *Comm. Pure Appl. Math.* **61** no. 3, 330.
- Davidson P A, 2015, *Turbulence : An introduction for scientists and engineers* (Oxford Univ. Press).
- Dean R B, 1978, Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two-dimensional rectangular duct flow *J. Fluid Engng.* **100**, 215.
- Dekker H, 1981, Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator *Phys. Rept.* **80**, 1.
- de Gregorio-Monsalvo I, Ménard F, Dent W, Pinte C, López C, Klaassen P, Hales A, Cortés P, Rawlings M G, Tachihara K, Testi L, Takahashi S, Chapillon E, Mathews G, Juhasz A, Akiyama E, Higuchi A E, Saito M, Nyman L-Å, Phillips N, Rodón J, Corder S and Van Kempen T, 2013, Unveiling the gas-and-dust disk structure in HD 163296 using ALMA observations *A&A* **557**, A133 (2013), DOI : 10.1051/0004-6361/201321603.
- Dharmarathne S, Tutkun M, Araya G and Castillo L, 2015, Structures of scalar transport in a turbulent channel *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **55**, 259.
- Drazin P and Riley N, 2006, The Navier-Stokes equations, A classification of flows and exact solutions *London Math. Soc. Lec. Note Ser. 334* (Cambridge Univ.).
- Dugas René, 1988, *A history of mechanics* (Dover, New York).
- Eckart C, 1938, The electrodynamics of material media *Phys. Rev.* **54**, 920.
- Eyink G L, 2010, Stochastic least-action principle for the incompressible Navier-Stokes equation *Phys. D* **239**, 1236.
- Ferro M, 2012, Experimental study on turbulent pipe flow *Tech. Rep. from Royal Inst. of Tech., KTH Mechanics.* (Available at : <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:558033/FULLTEXT01.pdf>), [retrieved February 1, 2016].
- Frewer M, Khujadze G and Foysi H, 2014, *Is the log-law a first principle result from Lie-group invariance analysis?* (Available at : <http://arxiv.org/abs/1412.3069v1>), [retrieved February 1, 2016].
- Fukagawa H and Fujitani Y, 2012, A variational principle for dissipative fluid dynamics *Prog. Theor. Phys.* **127**, 921.
- Fulton C D, 1950, Ranque's tube *ASRE Refig. Eng.* **58**, 473.
- Gatski T B and Bonnet J-P, 2009, *Compressibility, Turbulence and High Speed Flow* (Elsevier, Oxford),

Chap. 3.

- George W K, 2007, Is there a universal log law for turbulent wall-bounded flows? *Philos Trans A Math Phys Eng Sci.* **365**, 789.
- Germano M, Abbà A, Arina R and Bonaventura L, 2014, On the extension of the eddy viscosity model to compressible flows *Phys. Fluids* **26**, 041702-1-3.
- Heisenberg W, 1948, Zur statistischen Theorie der Turbulenz *Z. Phys.* **124**, 628.
- Herivel J W, 1955, The derivation of the equations of motion of an ideal fluid by Hamilton's principle *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **51**, 344.
- Inoue A and Funaki T, 1979, On a new derivation of the Navier-Stokes equation *Comm. Math. Phys.* **65**, 83.
- Izakson A, 1937, On the formula for the velocity distribution near walls *Tech. Phys. SSSR* **4**, 155.
- Jones W P and Launder B E, 1972, The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**, 301.
- Karimpour F and Venayagamoorthy S K, 2013, Some insights for the prediction of near-wall turbulence *J. Fluid Mech.* **723**, 126.
- Keizer J, 1987, Statistical thermodynamics of nonequilibrium processes *Springer* Chap. 1.
- Kerswell R R, 1999, Variational principle for the Navier-Stokes equations *Phys. Rev.* **E59**, 5482.
- Kim J, Moin P and Moser R, 1987, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number *J. Fluid Mech.* **177**, 133.
- Kolmogorov A N, 1991, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers *Proc. R. Soc. London* **A434**, 9.
- Kolmogorov A N, 1961, A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number *J. Fluid Mech.* **13**, 82.
- Landau L D and Lifshitz E M, 1959, *Fluid Mechanics* (Pergamon, New York) Sec. 15.
- Laufer J, 1951, Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel *Nat. Adv. Ctee Aero., Wash. Rep.* No. 1053.
- Laufer J, 1953, The structure of turbulence in fully developed pipe flow *Nat. Adv. Ctee Aero., Wash. Rep.* No. 1174.
- Lauga E, Brenner M P and Stone H A, 2007, Microfluidics : the no-slip boundary condition *Springer handbook of experimental fluid mechanics* (eds. Cameron Tropea, Alexander L. Yarin, John F. Foss, Springer, Berlin), pp. 1219-1240.
- Lin C C, 1963, Hydrodynamics of Helium II *Proc. Int. Sch. Phys.* **XXI** pp. 93-146 (Academic, New York).
- Marusic I, McKeon B J, Monkewitz P A, Nagib H M, Smits A J and Sreenivasan K R, 2010, Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers : Recent advances and key issues *Phys. Fluid* **22**, 065103.
- Milikan C B, 1939, A critical discussion of turbulent flow in channels and circular tubes *Proc. V Int. Congr. Appl. Mech.* (Cambridge Mass.), 386.
- Mittag L, Stephen M J and Yourgrau W, 1968, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory* (ed. Yourgrau W and Mandelstram S, Dover, New York) pp. 142-161.
- Nagano Y and Tagawa M, 1990, An improved $k-\epsilon$ model for boundary layer flows *ASME J. Fluids Engng.* **112**, 33.
- Nakagomi T, Yasue K, and Zambrini J.-C, 1981, A stochastic variational derivation of the Navier-Stokes equation *Len. Mad Phys.* **5**, 545-552.
- Okamoto M, 1994, Theoretical investigation of an eddy-viscosity-type representation of the Reynolds stress *J. Phys. Soc. Jpn.* **63**, 2102.
- Oseen C W, 1911, Über Wirbelbewegung in einer reibenden Flüssigkeit *Ark. Mat Astron. Fys.* **7**, 14.
- Pradeep D S and Hussain F, 2000, Core dynamics of a coherent structure : a prototypical physical-

- space cascade mechanism? *Turbulence Structure and Vortex Dynamics* (ed. Hunt J C R and Vassilicos J C, Cambridge Univ. Press, Cambridge), pp. 54-82.
- Polihronov J G and Straatman A G, 2015, Vortex tube effect without walls *Can. J. Phys.* **99**, 1 ; 2012, Thermodynamics of angular propulsion in fluids *Phys. Rev. Lett.* **109**, 054504.
- Pope S B, 1975, A more general effective-viscosity hypothesis *J. Fluid Mech.* **72**, 331.
- Pope S B, 2000, *Turbulent Flows*, Chap. 7 (Cambridge Univ. Press, Cambridge).
- Prandtl L, 1933, Recent results of turbulence research *Z. VDI* **77**, 105 (*Tech. Mem. Nat. Adv. Ctee Aero., Wash. Rep.* No. 720).
- Roberts M S and Rots A H, 1973, Comparison of rotation curves of different galaxy types *Astron. Astrophys.* **26**, 483.
- Rott N, 1959, On the viscous core of a line vortex II *Z. angew. Math. Phys.* **X**, 73.
- Rubin V C and Ford Jr W K, 1970, Rotation of the Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions *ApJ.* **159**, 379.
- Salmon R, 1988, Hamiltonian fluid mechanics *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20**, 225.
- Sears F W, 1972, *An introduction to thermodynamics, the kinetic theory of gases, and statistical mechanics* 2nd ed, (Addison-Wesley Pub.) Chap. 13.
- Sellwood J A, 2014, Secular evolution in disk galaxies *Rev. Mod. Phys.* **86**, 1 (2014).
- Shih T-H, 1996, Constitutive relation and realizability of single-point turbulence closure, Chap. 4 in *Turbulence and Transition Modeling*, Hallböck M, Henningson D S, Johansson A V, and Alfredsson P H (eds.), pp. 155-192 (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht).
- Sofue Y and Rubin V, 2001, Rotation curves of spiral galaxies *Ann. Rev. A&A.* **39**, 137.
- Sogo K, 2017, Variational derivation of dissipative equations *J. Phys. Soc. Jpn.* **86**, 034002.
- Spalart P R and Allmaras S R, 1992, A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows *AIAA Paper* 92-439, Reno, NV, USA.
- Speziale C G, Sarkar S, and Gatski T B, 1991, Modelling the pressure-strain correlation of turbulence : an invariant dynamical systems approach *J. Fluid Mech.* **227**, 245.
- Speziale C G, 1991, Analytical methods for development of Reynolds-stress closures in turbulence *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 107.
- Speziale C G, 1996, Modeling of turbulent transport equations, Chap. 5 in *Simulation and Modeling of Turbulent Flows*, Gatski T B, Hussaini M Y, and Lumley J L (eds.) pp. 185-242 (Oxford Univ. Press, New York).
- Suga K, 1998, Recent Developments in eddy viscosity modelling of turbulence *R&D Review of Toyota CRDL* **33**, No. 1.
- Sullivan R D, 1959, A two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations *J. Aerosp. Sci.* **26**, 767.
- Takahashi K, 2014a, Non-Eulerian inviscid vortices *Fac. Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)* No. 167, 43 ; http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2014/pdf/no01_04.pdf.
- Takahashi K, 2014b, Classification of the steady axisymmetric vortices *Fac. Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)* No. 168, 51 ; http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2014/pdf/no06_03.pdf.
- Takahashi K, 2015, Application of the viscosity-expansion method to a rotating thin fluid disk bound by central gravity *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015**, 073J0, doi : 10.1093/ptep/ptv097.
- Takahashi K, 2016, A new eddy-viscosity model and turbulence, *Fac. Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)* No. 174, 1.
- Takahashi K, 2017a, Can diffusion be quantized? *J. Human Inf.* (Tohoku Gakuin Univ.) **22**, 21.
- Takahashi K, 2017b, Mean-field theory of turbulence from variational principle and its application to the rotation of a thin fluid disk *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017**, 083J01, doi : 10.1093/ptep/ptx109.
- Van Driest E R, 1956, On turbulent flow near a wall *J. Aeronaut. Sci.* **58**, 1007.

- Van Saarloos W, Bedeaux D and Mazur A, 1981a, Hydrodynamics for an ideal fluid : Hamiltonian formulation and Liouville-Equation *Physica*. **107A**, 109.
- Van Saarloos W, 1981b, A Canonical Transformation Relating the Lagrangian and Eulerian Description of Ideal Hydrodynamics *Physica*. **108A**, 557.
- von Neumann J, 1963, *Recent theories of turbulence in Collected Works* **6**, (Pergamon Press, New York, pp. 437-472), ed A. H. Taub.
- Warhaft Z, 2000, Passive scalars in turbulent flows *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 203. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fluid.32.1.203>.
- Weatheritt J and Sandberg R D, 2016, in *Advances in Computation, Modeling and Control of Transitional and Turbulent Flows*, eds. Sengupta T K, Lele S K, Sreenivasan K R and Davidson P A (World Scientific, Tokyo), p. 330.
- Wei T and Willmarth W W, 1989, Reynolds-number effects on the structure of a turbulent channel flow *J. Fluid Mech.* **204**, 57.
- Williamson C H K, Leweke T and Miller G D, 2000, Fundamental instabilities in spatially-developing wing wakes and temporally-developing vortex pairs, *Turbulence Structure and Vortex Dynamics* (ed. Hunt J C R and Vassilicos J C, Cambridge univ. Press, Cambridge), pp. 83-103.
- Yokoi N and Brandenburg A, 2016, Large-scale flow generation by inhomogeneous helicity *Phys. Rev.* **E93**, 033125.
- Yokoi N and Yoshizawa A, 1993, Statistical analysis of the effects of helicity in inhomogeneous turbulence *Phys. Fluids* **A5**, 464.
- Yoshizawa A, 1984, Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation *Phys. Fluids* **27**, 1377.
- Yoshizawa A, Abe H, Matsuo Y, Fujiwara H and Mizobuchi Y, 2012, A Reynolds-averaged turbulence modeling approach using three transport equations for the turbulent viscosity, kinetic energy, and dissipation rate *Phys. Fluids* **24**, 075109.
- Yourgrau W and Mandelstram S (ed.), 1968, *Variational principles in dynamics and quantum theory* (Dover, New York).
- Yasue K, 1981, Stochastic calculus of variations *J. Funct. Anal.* **41**, 327.
- Zanoun E-S, Durst F and Nagib H, 2003, Evaluating the law of the wall in two-dimensional fully developed turbulent channel flows *Phys. Fluids* **15**, 3079.
- 木田重雄・柳瀬眞一郎 [Kida S, Yanase S] 1999, 『乱流力学 Turbulence dynamics』(朝倉書店), pp. 26-31 ; 318-317.
- 百瀬宗武 [Momose M] 2017, 『ALMA が明かした原始惑星円盤の姿 Protoplanetary disks revealed by ALMA』日本物理学会誌 (*Butsuri*) **72**, 86.
- 西野耕一・笠木伸英 [Nishino K, Kasagi K] 1990, 『三次元画像処理流速計による二次元チャネル乱流の乱流統計量の測定 Turbulence statistics measurement in a two-dimensional turbulent channel flow with the aid of the three-dimensional particle tracking velocimeter』日本機械学会論文集 (B 編) **56**, 1338.
- 高橋光一 [Takahashi K] 2015a, 『渦のパラドックスについて On the paradox of vortices』東北学院大学教養学部論集 No. 170, 91.
- 高橋光一 [Takahashi K] 2015b, 『単純渦と台風 Simple vortices and typhoon』東北学院大学教養学部論集 No. 171, 105.
- 高橋光一 [Takahashi K] 2016, 『非圧縮粘性流の Euler 力学に対する変分原理と渦粘性モデル Variational principle for Eulerian dynamics of incompressible viscous flow and eddy-viscosity model』日本流体力学会年会 2016 (名古屋工業大学).
- 高橋光一 [Takahashi K] 2018, 『流体力学における変分原理と乱流の平均場理論—「渦のパラドックス」のその後—I 乱流の渦粘性理論と正準変分原理 Variational Principle in Hydrodynamics and Mean-Field Theory of Turbulence — A sequel of the Paradox of Vortices- I』東北

学院大学教養学部論集 No. 179, 119.

多田政忠 [Tada M] (編) 1967, 『物理学概説 上巻 Outline of Physics Vol. One』 (学術図書出版社)
pp. 218-219.

谷一郎 [Tani I] 1967, 『流れ学 Flowlogy 第 3 版』 (岩波書店), 第 6 章.

寺本英 [Teramoto E] 1990, 『ランダムな現象の数学 Mathematics of random phenomena』 (吉岡
書店) pp. 29-31.

豊田利幸 [Toyoda T] 1978, 『確率論的古典力学 Probabilistic classical mechanics』 現代物理学の
基礎 2 (大沢他編) (岩波), pp. 229-276.