

# 散逸連続体の量子論

高 橋 光 一

有限自由度（位相空間で自由度が2または4）の散逸モデルとしてよく知られているものに Bateman 系がある。Bateman 系は、非0質量の調和振動子が速度に比例する摩擦力を受けて運動する力学系で、ハミルトニアンが存在する散逸系の1つである。標準的な正準量子化法に基づいて古典 Bateman 系を量子化することはできるが、そこには真空の不安定や不確定性原理との矛盾という問題が内在することが昔から知られていた。ところが、この系を0質量の2つの散逸系の組み合わせとみなすことにより、量子論の基本原則である真空の安定性および Heisenberg の不確定性原理に矛盾しない量子化が可能になることが最近になって明らかになった。しかし、量子化された Bateman 系と正しく対応する現実の量子散逸系が存在するか否かはまた別の問題である。本稿では、自由度を無限大にした場の量子論が可能であること、それが観測可能な粘弾性体を表すこと、そのときハミルトニアンの存在と結びついた特徴的な現象が曲がった空間のホロノミーに関する Berry の定理の帰結として現れること、また、散逸に付随する量子 = 散逸子の存在が予想されることを論じる。

**重要語句：**散逸と拡散、減衰調和振動子、Bateman 系、時間反転共役、量子化、不確定性原理、粘弾性、ホロノミー、Berry の定理、スクイーズド状態

## 1. Bateman 連続体

散逸とは、対象とする系のエネルギーが減少する一方の現象をいう。日常あるいは自然界にありふれた現象で、例えば、放置された振り子の振れが次第に小さくなるのはエネルギーの散逸が起きているからと、我々は一々確かめることなく考える。根拠はエントロピー増大の原理にある（高橋 2019）。エントロピー増大の原理は、いわば起りやすいことが起きるということ述べているに過ぎず、古典論・量子論に関係なく成立しなければならない。この点で真っ先に成功したのが古典論での熱力学や統計力学であり、最も一般的な理論体系の構築に成功している。しかし、量子論では足踏み状態が続いている。教科書にある量子論は、物理法則が時間的に不変であることを体現するハミルトニアンという演算子が存在し、かつ

この演算子が系のエネルギーを表すことを前提としているのがその理由である。

上記の問題について、Bateman 質点系の枠組みの中で最近幾ばくかの進展が見られた (高橋 2019)。その成果に基づき、本論文では Bateman 連続体を考察の対象とする。それは以下のようなものである。伸び縮みする物体があって、その変形が物体内部に力—応力—を生むとする。図 1 にその概念を表している。物体は部分 A, B, C という部分からなり、かつ変形はある方向に沿って起きていて、B の矢印部分が A では伸び C では縮んだとする。この変形による A と B, B と C のずれが隣接部分に相互に力を及ぼしているというモデルが Bateman 連続体である。Bateman 質点系と異なり、現実の系を直接的に表すと考えられる。

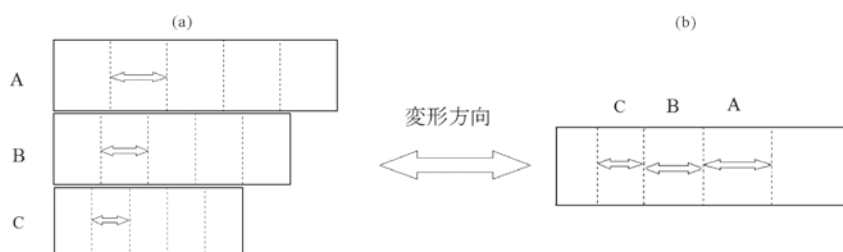


図 1. Bateman 連続体の変形概念図。隣接する A と B, B と C で変形の程度に差がある。この差が弾性力と摩擦力を生む。(a) は変形方向とその勾配が直交している場合。(便宜上, A と B, B と C の間に隙間をおいて図示している。) (b) は変形方向とその勾配が平行の場合。

そのような系を念頭に置いて、次のラグランジュアンを考える<sup>1</sup>：

$$L = \int d\mathbf{r} \left( m\dot{\xi} + \frac{\gamma}{2} (\nabla\eta \cdot \nabla\xi - \nabla\eta \cdot \nabla\xi) - \kappa \nabla\eta \cdot \nabla\xi \right) \equiv \int d\mathbf{r} \mathcal{L} \quad (1.1)$$

$\xi(\mathbf{r}, t)$  は図 1 の連続体の変形—平衡位置からのずれ—を表す変数,  $\eta(\mathbf{r}, t)$  は Lagrange 乗数,  $m$  は質量密度,  $\gamma$  は散逸定数,  $\kappa$  は弾性定数である。空間座標に関する勾配  $\nabla$  は、変形による力が隣接部分の変形の差によることを反映して、物体の平行移動に関し運動法則不変であることを保証している。このラグランジュアンは Takahashi (2019) が提案し、いくつかの興味深い帰結をもたらした。その概略は Takahashi (2018c) を見られたい。

散逸が無い場合の任意次元等方物体に対する標準形 (例えばキッテル 1972 を見よ)

$$L' = \int d\mathbf{r} \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 - \frac{\alpha}{2} (\nabla \cdot \mathbf{R})^2 - \frac{\beta}{2} (\nabla \mathbf{R})^2 \right) \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> 0 質量の散逸モデル、すなわち (1.1) や (1.4) で  $m=0$  かつ  $\gamma$  に比例する項に空間微分がないモデルは Takahashi (2017) によって考察された。そこでは、古典論では  $\eta$  は非物理的なので、 $\eta$  を 1 次で含むハミルトニアン期待値は 0 になることを物理的状態の条件とした。本稿ではこの条件を物理要件からはずす。

と比べると、(1.1) の特殊性がよく分かるであろう。標準的なモデル (1.2) から得られるハミルトニアンは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和で正定値である。しかも時間に関して並進不変である。しかし、散逸項を入れることはできず、散逸を取り入れたハミルトニアンも存在しない。(1.1) では事情は異なる。実際、(1.1) の正準ハミルトニアンは存在して<sup>2</sup>

$$H = \int d\mathbf{r} \left( \frac{1}{m} \left( p_\xi - \frac{\gamma}{2} \nabla^2 \eta \right) \left( p_\eta + \frac{\gamma}{2} \nabla^2 \xi \right) + \kappa \nabla \eta \cdot \nabla \xi \right) \equiv \int d\mathbf{r} \mathcal{H} \quad (1.3a)$$

$$p_\xi = m\dot{\eta} + \gamma \nabla^2 \eta / 2, \quad p_\eta = m\dot{\xi} - \gamma \nabla^2 \xi / 2 \quad (1.3b)$$

である。 $p_\xi$  と  $p_\eta$  はそれぞれ  $\xi$  と  $\eta$  の共役運動量である。運動方程式は

$$m\ddot{\xi}(\mathbf{r}, t) - \gamma \nabla^2 \dot{\xi}(\mathbf{r}, t) - \kappa \nabla^2 \xi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.4a)$$

$$m\ddot{\eta}(\mathbf{r}, t) + \gamma \nabla^2 \dot{\eta}(\mathbf{r}, t) - \kappa \nabla^2 \eta(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.4b)$$

となる。時間とともに  $\xi$  は指数関数的に減衰し、 $\eta$  は増大する。実在する減衰弾性体の変形を記述するのは古典論では  $\xi$  である。 $\eta$  に対応する古典的物理量は存在しない。Feshbach & Tikochinsky (1977), Celeghini et al. (1992), Dekker (1981) らの古い見方では、ハミルトニアン (1.3a) を保存するエネルギーと考える。そして、着目している現実の系がエネルギーを減らすのだから、減った分は“環境”に流れ出ることによって全体のエネルギーを一定にしなければならぬとする。 $\eta$  をその環境を代表する変数と解釈する。しかし、この解釈は成り立たない。散逸がなければ  $\eta$  も調和振動するのだから調和振動子である。これが指数関数的にその絶対値を増大させれば、力学エネルギーも指数関数的に増大するはずである。これは始めの仮定に反する。

$\xi(\mathbf{r}, t)$  と  $\eta(\mathbf{r}, t)$  を波数ベクトル  $\mathbf{k}$  のモードで Fourier 分解する。

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \eta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \eta_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.5)$$

すると  $\mathbf{k} \neq 0$  に対し (1.4) は次のように表される：

<sup>2</sup> ちなみに、エネルギー運動量テンソル密度は以下で与えられる (例えば Bjorken & Drell 1965) :

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \xi / \partial x_\mu)} \frac{\partial \xi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \eta / \partial x_\mu)} \frac{\partial \eta}{\partial x^\nu}$$

各成分は、00 成分  $T_{00}$  では全微分項を残して

$$T_{00} = \mathcal{H} - (\gamma/2) \nabla \cdot (\dot{\eta} \nabla \xi - \nabla \eta \dot{\xi})$$

$$T_{0i} = T_{i0} = m(\dot{\eta} \partial_i \xi + \partial_i \eta \dot{\xi}) + (\gamma/2) (\nabla^2 \eta \partial_i \xi - \partial_i \eta \nabla^2 \xi)$$

$$T_{ij} = -\gamma (\partial_i \eta \partial_j \dot{\xi} - \partial_j \eta \partial_i \dot{\xi}) - \kappa (\partial_i \eta \partial_j \xi + \partial_j \eta \partial_i \xi)$$

$$m\ddot{\xi}_k + \gamma_k \dot{\xi}_k + \kappa_k \xi_k = 0 \quad (1.6a)$$

$$m\ddot{\eta}_k - \gamma_k \dot{\eta}_k + \kappa_k \eta_k = 0 \quad (1.6b)$$

ここで  $\gamma_k \equiv \gamma k^2$ ,  $\kappa_k \equiv \kappa k^2$  である。これは有限質量 Bateman 系 (Bateman 1931, 高橋 2019) にはかならない。したがって Bateman 系の量子化の方法が直接適用できるのである。

$$w_k \equiv \frac{4m\kappa_k}{\gamma_k^2} = \frac{4m\kappa}{\gamma^2 k^2}$$

という量を定義すると,  $w_k < 1$  が過減衰,  $1$  が臨界減衰,  $> 1$  が過少減衰である (高橋 2019)。  $k = |\mathbf{k}|$  を変えることで, これら 3 つの領域間を移動できるのがこの連続体モデルの最大の特徴である。

ハミルトニアンを

$$H_B[\xi, \eta] = \sum_k (m\dot{\eta}_k \dot{\xi}_k + \kappa_k \eta_k \xi_k) \equiv \sum_k H_B[\xi_k, \eta_k] \quad (1.7)$$

のように, 波数ベクトル  $\mathbf{k}$  に関する和の形に書いておく。ここで,  $\dot{\xi}_k = \dot{\xi}_k(\Pi_k^\eta, \xi_k)$  と  $\dot{\eta}_k = \dot{\eta}_k(\Pi_k^\xi, \eta_k)$  は共役運動量と

$$\Pi_k^\xi = m\dot{\eta}_k - \gamma_k \eta_k / 2, \quad \Pi_k^\eta = m\dot{\xi}_k + \gamma_k \xi_k / 2 \quad (1.8)$$

によって関係づけられている。

(1.6) の解は  $\xi_k \sim e^{-\lambda t}$ ,  $\eta_k \sim e^{\lambda t}$  の形に書ける。すると, 解は次の 1 階微分方程式を満たす 2 組存在する:

$$\dot{\xi}_{i,k} + \lambda_{i,k} \xi_{i,k} = 0, \quad \dot{\eta}_{i,k} - \lambda_{i,k} \eta_{i,k} = 0, \quad (i=1, 2) \quad (1.9a)$$

$$\lambda_{1,k} = \frac{\gamma_k}{2m} (1 + \sqrt{1 - w_k}), \quad \lambda_{2,k} = \frac{\gamma_k}{2m} (1 - \sqrt{1 - w_k}) \quad (1.9b)$$

過少減衰のときは  $\lambda_{i,k}$  は複素数になり,  $\xi_k$  の減衰振動を表す。他方,  $\eta_k$  はその振幅が指数関数的に増大する。したがって, 純粋な散逸系に関する限り  $\eta_k$  は観測量に直接対応する物理的座標にはなりそうもない。我々は (1.3a) あるいは (1.7) をエネルギーと同一視せず, 異なった道を進む (高橋 2019)。

## 2. 量子化の準備

有限質量 Bateman 系の量子化法に従って, 連続体 Bateman 系を量子化する (Takahashi 2018a, Takahashi 2018b, 高橋 2019) のであるが, そのための準備をしておく。まず, 各波数ベクトル  $\mathbf{k}$  について, 場を 2 つのモードに分ける:

$$\xi_k = \xi_{1,k} + \xi_{2,k}, \quad \eta_k = \eta_{1,k} + \eta_{2,k} \quad (2.1a)$$

$$\Pi_k^\xi = \Pi_{1,k}^\xi + \Pi_{2,k}^\xi, \quad \Pi_k^\eta = \Pi_{1,k}^\eta + \Pi_{2,k}^\eta \quad (2.1b)$$

$\Pi_{i,k}^\xi, \Pi_{i,k}^\eta$  はそれぞれ  $\xi_{i,k}, \eta_{i,k}$  の“共役運動量”で、 $\xi_{i,k}, \eta_{i,k}$  と (1.8) と同じ式で関係づけられている：

$$\Pi_{i,k}^\xi = m\dot{\eta}_{i,k} - \frac{\gamma_k}{2}\eta_{i,k}, \quad \Pi_{i,k}^\eta = m\dot{\xi}_{i,k} + \frac{\gamma_k}{2}\xi_{i,k}$$

ハミルトニアン (1.7) は、(1.9) を使うと部分系ハミルトニアンの和として表されるという重要な性質を持っている。すなわち

$$H_B[\xi_k, \eta_k] = H_B[\xi_{1,k}, \eta_{1,k}] + H_B[\xi_{2,k}, \eta_{2,k}] \quad (2.2)$$

右辺第1項と第2項はそれぞれ (1.9b) で与えられた  $\lambda_{1,k}$  と  $\lambda_{2,k}$  に対応するモードからなる部分系ハミルトニアンである。それぞれの部分系が双一次形式なので、 $H_B[\xi_k, \eta_k]$  としては  $U(1) \times U(1)$  対称性を持つ。全ハミルトニアンがこのように分離できることは Dekker (1977) が気づいていて、量子揺らぎのマスター方程式<sup>3</sup> をコヒーレント状態をもとに構成するのに用いている。この部分系を、本論文では Bateman 部分系と呼ぶことにする。

$\xi_{i,k}$  と  $\eta_{i,k}$  は元の変数を使って

$$\xi_{1,k} = -(\dot{\xi}_k + \lambda_{2,k}\xi_k) / \Delta, \quad \eta_{1,k} = (\dot{\eta}_k - \lambda_{2,k}\eta_k) / \Delta \quad (2.3a)$$

$$\xi_{2,k} = (\dot{\xi}_k + \lambda_{1,k}\xi_k) / \Delta, \quad \eta_{2,k} = -(\dot{\eta}_k - \lambda_{1,k}\eta_k) / \Delta \quad (2.3b)$$

のように表すことができる。 $\Delta \equiv \lambda_{1,k} - \lambda_{2,k} = (\gamma_k / m) \sqrt{1 - w_k} = \sqrt{\gamma_k^2 - 4m\kappa_k} / m$  である。

部分系ハミルトニアンは、(1.9a) を用いると

$$\begin{aligned} H_B[\xi_{i,k}, \eta_{i,k}] &= m\dot{\eta}_{i,k}\dot{\xi}_{i,k} + \kappa_k\eta_{i,k}\xi_{i,k} \\ &= (-m\lambda_{i,k}^2 + \kappa_k)\eta_{i,k}\xi_{i,k} \end{aligned} \quad (2.4)$$

これは0質量 Bateman 系 = 散逸拡散系と同型である (Takahashi 2018a)。このように、変数とハミルトニアンを単一モードに分離して、それぞれの部分系を0質量 Bateman 系と同等にし、それに0質量 Bateman 系の量子化手順を適用するのである。これで量子化の準備が整った。

<sup>3</sup> 相互作用がある非定常な系で、ある状態をとる確率の時間変化が、状態間の遷移確率と確率の保存則によって決まるという考えから導かれる。これについて量子論の草創期に提出された Ehrenfest の説明は、その後ノミと犬の喩えとして有名になった。例えば Keizer (1987), 高橋 (2019) を参照されたい。

### 3. 粘弾性との関係

弾性力と内部抵抗を受けながら運動を減衰させる物質は我々の周囲に豊富に存在する。高分子物質はその一例である。そのような物質が示す運動学的性質を粘弾性<sup>4</sup>という。粘弾性的運動のモデルの 1 つに Maxwell モデルがある<sup>5</sup>。Maxwell モデルは、錘がついたバネと減衰器が直列につながった系である (図 2)。

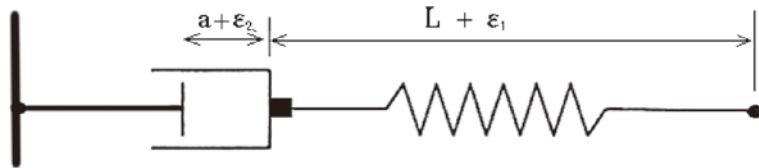


図 2. Maxwell モデル。右側のバネと左側の減衰器が直列につながっている。 $\epsilon_1$  は自然長  $L$  のバネの伸び、 $\epsilon_2$  は減衰器の基準位置  $a$  からの変位。

我々のモデルは粘弾性の Maxwell モデルと関係があることに触れておく。Maxwell 系全体のひずみ  $\epsilon$  はバネと減衰器の変位  $\epsilon_1$  と  $\epsilon_2$  の和であって、ひずみの大きさは応力  $\sigma$  と

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma, \quad \dot{\epsilon}_2 = \frac{1}{E\tau} \sigma \quad (3.1a)$$

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (3.1b)$$

のように関係づけられている。 $E$  (Young 率) と  $\tau$  (減衰時間) は定数である。

ここで唐突ながら  $\epsilon_i$ ,  $\epsilon$  が我々の  $\xi_{i,k}$ ,  $\xi_k$  と同じとしてみよう。すると (3.1a) から

$$\frac{\sigma}{E} = \xi_{1,k} = \tau \dot{\xi}_{2,k} \quad (3.2)$$

(2.3a,b) を (3.2) に代入して  $-(\dot{\xi}_k + \lambda_{-,k} \xi_k) = \tau (\ddot{\xi}_k + \lambda_{+,k} \dot{\xi}_k)$  となる。これを整理して

$$\ddot{\xi}_k + \left( \lambda_{1,k} + \frac{1}{\tau} \right) \dot{\xi}_k + \frac{\lambda_{2,k}}{\tau} \xi_k = 0 \quad (3.3)$$

を得る。これが散逸方程式 (1.6a) と一致するのは  $\gamma_k / m = \lambda_{1,k} + 1/\tau$  と  $\kappa_k / m = \lambda_{2,k} / \tau$  が同時に成り立つときである。これより  $\tau$  を消去して

<sup>4</sup> ゴムなどの示す弾性とプラスチックなどが示す塑性の中間の性質である。粘弾性では、初め変形と応力は比例するが、応力を無くしても変形は残る。粘弾性を持つ高分子物質は、力をゆっくり加えると粘性流体のように振る舞い、急激な作用下では弾性体として振る舞う。家庭で簡単につくることができる加水したコンスターチはその一例である。外力が急激に変動する場合に興味深い挙動を示すことも知られている (Merkt et al. 2004)。

<sup>5</sup> バネと減衰器を並列させたものは Kelvin-Voigt モデル、Maxwell モデルを横に並列に並べたものは標準線型モデルと呼ばれる。

$$\sqrt{1-w_k} = 1-w_k$$

$\tau$  はこの結果を用いて

$$\tau = \frac{m}{\kappa_k} \lambda_{2,k} = \frac{2m}{\gamma \mathbf{k}^2 (2-w_k)}$$

である。 $w_k = 1$  または  $0$ , すなわち次の場合が可能である:

$$w_k = \frac{4m\kappa}{\gamma^2 \mathbf{k}^2} \rightarrow 1, \quad \tau = \frac{\gamma}{2\kappa}, \quad \lambda_{i,k} = \frac{\gamma \mathbf{k}^2}{2m} = \frac{1}{\tau} \quad (3.4a)$$

$$\kappa = 0, \quad \tau = \frac{m}{\gamma \mathbf{k}^2}, \quad \lambda_{1,k} = \frac{\gamma \mathbf{k}^2}{m} = \frac{1}{\tau}, \quad \lambda_{2,k} = 0 \quad (3.4b)$$

(3.4a) で等号ではなく極限記号を使ったのは, (2.3) にこの極限で  $0$  になる除数  $\Delta$  という量が含まれているからである。(3.4a) は臨界減衰の Bateman 系, (3.4b) はバネ無しの Bateman 系の場合である。どちらの場合も, 減衰時間  $\tau$  は波数に依存し, 波数が大きいほど短い。臨界減衰では 2 つの減衰率は同じ  $1/\tau$  になる。バネ無しの Bateman 系でも粘弾性を表しうるのは面白い。粘弾性についての詳しい解説は, 例えば Christensen (1982), Tim et al. (2014) にある。

#### 4. 過減衰領域での量子化

過減衰領域では, 波数ベクトルは  $\bar{k} \equiv |\mathbf{k}|/k_0 > 1$  である。ここで  $k_0 \equiv 2\sqrt{m\kappa}/\gamma$  は過減衰領域と過少減衰領域を分ける特性波数ベクトルである。

Bateman 部分系は 0 質量 Bateman 系と同等なので, 演算子  $a_{i,k}$  と  $\tilde{a}_{i,k}$  を使い, Bateman 部分系の座標を次のように表す (Takahashi 2018b, 高橋 2019):

$$\begin{aligned} (\xi_{1,k}, \eta_{1,k}) &= \sqrt{\frac{\hbar}{\gamma_k \delta_k^{(o)}}} \left( e^{-\lambda_{1,k} t} a_{1,k}, i e^{\lambda_{1,k} t} \tilde{a}_{1,k} \right) \\ (\xi_{2,k}, \eta_{2,k}) &= \sqrt{\frac{\hbar}{\gamma_k \delta_k^{(o)}}} \left( i e^{-\lambda_{2,k} t} a_{2,k}, -e^{\lambda_{2,k} t} \tilde{a}_{2,k} \right) \end{aligned} \quad (4.1a)$$

$$\delta_k^{(o)} \equiv \sqrt{1-w_k} = \sqrt{\bar{k}^2 - 1} / \bar{k} \quad (4.1b)$$

$w_k = 4m\kappa_k / \gamma_k^2 < 1$  なので  $\delta_k^{(o)} > 0$  である。 $\lambda_{i,k}$  は (1.9b) で定義している。後の便宜のために  $\lambda_{i,k}$  の別の表現も与えておく。

$$\begin{aligned}\lambda_{1,k} &= \frac{\gamma_k}{2m} \left(1 + \delta_k^{(o)}\right) = \frac{2\kappa}{\gamma} \left(\bar{k}^2 + \bar{k} \sqrt{\bar{k}^2 - 1}\right) \\ \lambda_{2,k} &= \frac{\gamma_k}{2m} \left(1 - \delta_k^{(o)}\right) = \frac{2\kappa}{\gamma} \left(\bar{k}^2 - \bar{k} \sqrt{\bar{k}^2 - 1}\right)\end{aligned}\tag{4.2}$$

2つの解があるが、それらは  $\bar{k} \rightarrow 1$  で同一の値をとる。 $i=1$  と  $2$  それぞれの部分系は Dedene のハミルトニアン (Dedene 1980) で記述されるものと同じである。

Takahashi (2018a, 2018b) に従い次の交換関係を課す：

$$\left[\xi_{i,k}, \Pi_{j,k'}^\xi\right] = \left[\eta_{i,k}, \Pi_{j,k'}^\eta\right] = i \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \delta_{kk'}\tag{4.3a}$$

$$\left[\xi_{1,k}, \eta_{1,k'}\right] = -\left[\xi_{2,k}, \eta_{2,k'}\right] = i \frac{\hbar}{\gamma_k \delta_k^{(o)}} \delta_{kk'}\tag{4.3b}$$

(4.3a) の右辺の因子  $1/2$  は、これらの変数が Bateman 部分系のものであることによる。伝統的な正準量子化法 (Feshbach & Tikochinsky 1977, Celeghini et al. 1992, Dekker 1981, Um et al. 2002, Bopp 1973) との違いは (4.3b) に現れている。我々の量子化の方法では、観測変数と補助変数は部分系において交換しないのである。これは  $0$  質量 Bateman 系の特徴の反映である (Takahashi 2018a)。にもかかわらず、(4.3) は全系では通常の正準交換関係を導くことを確かめることができる ((4.8) を見よ)。

代数の計算では、運動方程式

$$\dot{\xi}_{i,k} = -\lambda_{i,k} \xi_{i,k}, \quad \dot{\eta}_{i,k} = \lambda_{i,k} \eta_{i,k}$$

を使って  $\Pi_{i,k}^\xi = m \dot{\eta}_{i,k} - (\gamma_k / 2) \eta_{i,k}$  と  $\Pi_{i,k}^\eta = m \dot{\xi}_{i,k} + (\gamma_k / 2) \xi_{i,k}$  を簡単に表しておくのが便利である：

$$\begin{aligned}\Pi_{1,k}^\xi &= \frac{\gamma_k \delta_k^{(o)}}{2} \eta_{1,k}, & \Pi_{1,k}^\eta &= -\frac{\gamma_k \delta_k^{(o)}}{2} \xi_{1,k}, \\ \Pi_{2,k}^\xi &= -\frac{\gamma_k \delta_k^{(o)}}{2} \eta_{2,k}, & \Pi_{2,k}^\eta &= \frac{\gamma_k \delta_k^{(o)}}{2} \xi_{2,k}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

次に、いわゆる “ $z$ -表示” に移る。本稿では “ $\zeta$ -表示” と呼ぶ新しい変数は、座標については

$$\begin{aligned}\zeta_{1,k}(t) &= \frac{\xi_{1,k} - i \eta_{1,-k}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\gamma_k \delta_k^{(o)}}} \left( e^{-\lambda_{1,k} t} a_{1,k}(0) + e^{\lambda_{1,k} t} \tilde{a}_{1,-k}(0) \right) \\ \zeta_{2,k}(t) &= \frac{\xi_{2,k} + i \eta_{2,-k}}{\sqrt{2}} \\ &= i \sqrt{\frac{\hbar}{2\gamma_k \delta_k^{(o)}}} \left( e^{-\lambda_{2,k} t} a_{2,k}(0) - e^{\lambda_{2,k} t} \tilde{a}_{2,-k}(0) \right)\end{aligned}\tag{4.5a}$$



運動量については

$$\begin{aligned}
 \Pi_{1,k}(t) &= \frac{\Pi_{1,k}^\xi + i\Pi_{1,-k}^\eta}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar\gamma_k\delta_k^{(o)}}{2}} \left( e^{\lambda_1 kt} \tilde{a}_{1,k}(0) - e^{-\lambda_1 kt} a_{1,-k}(0) \right) \\
 \Pi_{2,k}(t) &= \frac{\Pi_{2,k}^\xi - i\Pi_{2,-k}^\eta}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar\gamma_k\delta_k^{(o)}}{2}} \left( e^{\lambda_2 kt} \tilde{a}_{2,k}(0) + e^{-\lambda_2 kt} a_{2,-k}(0) \right)
 \end{aligned} \tag{4.5b}$$

である。交換関係は

$$[\zeta_{i,k}(t), \Pi_{i,k'}(t)] = i \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \delta_{kk'}, \tag{4.6a}$$

$$[\zeta_{i,k}(t), \zeta_{j,k'}(t)] = [\Pi_{i,k}(t), \Pi_{j,k'}(t)] = 0 \tag{4.6b}$$

$\zeta$ -表示での全系変数は部分系変数の単純和で与えられる：

$$\zeta_k(t) = \zeta_{1,k}(t) + \zeta_{2,k}(t) \tag{4.7a}$$

$$\Pi_k(t) = \Pi_{1,k}(t) + \Pi_{2,k}(t) \tag{4.7b}$$

その交換関係は

$$[\zeta_k, \Pi_{k'}] = i\hbar\delta_{k,k'} \tag{4.8}$$

のような正準形となる。線形結合のしかたは一意的ではない。しかし、一旦 (4.7) のように決めたら、後はこれを以後の全計算で使用する。

演算子  $a_{i,k}$  と  $\tilde{a}_{i,k}$  は

$$\begin{aligned}
 a_{1,k}(0) &= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left( \sqrt{\frac{\gamma_k\delta_k^{(o)}}{2}} \zeta_{1,k} + i \sqrt{\frac{2}{\gamma_k\delta_k^{(o)}}} \Pi_{1,-k} \right) \\
 \tilde{a}_{1,k}(0) &= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left( \sqrt{\frac{\gamma_k\delta_k^{(o)}}{2}} \zeta_{1,-k} - i \sqrt{\frac{2}{\gamma_k\delta_k^{(o)}}} \Pi_{1,k} \right)
 \end{aligned} \tag{4.9a}$$

$$\begin{aligned}
 a_{2,k}(0) &= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left( -i \sqrt{\frac{\gamma_k\delta_k^{(o)}}{2}} \zeta_{2,k} + \sqrt{\frac{2}{\gamma_k\delta_k^{(o)}}} \Pi_{2,-k} \right) \\
 \tilde{a}_{2,k}(0) &= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left( i \sqrt{\frac{\gamma_k\delta_k^{(o)}}{2}} \zeta_{2,-k} + \sqrt{\frac{2}{\gamma_k\delta_k^{(o)}}} \Pi_{2,k} \right)
 \end{aligned} \tag{4.9b}$$

となる。ここで

$$\gamma_k\delta_k^{(o)} = \frac{4m\kappa}{\gamma} \bar{k} \sqrt{\bar{k}^2 - 1} \tag{4.10}$$

(4.9) で  $\zeta_{i,k}$  と  $\Pi_{i,k}$  は  $t=0$  での演算子である。 $a_{i,k}$  と  $\tilde{a}_{i,k}$  は互いにエルミット共役ではないが、交換関係は

$$[a_{i,k}, \tilde{a}_{j,k'}] = \delta_{ij} \delta_{k,k'} \quad (4.11)$$

となる。これにより  $a_{i,k}$  と  $\tilde{a}_{i,k}$  をそれぞれ消滅、生成演算子と見ることができ(2.2)に使われた部分系ハミルトニアンは次のように表される：

$$\hat{H}_{B,i} \equiv \hat{H}_B[\zeta_{i,k}, \eta_{i,k}] = -i\hbar \sum_k \lambda_{i,k} \tilde{a}_{i,k} a_{i,k} \quad (4.12)$$

これは  $U(1) \times U(1)$  変換  $\zeta_{i,k} \rightarrow e^{i\phi} \zeta_{i,k}$ ,  $\eta_{i,k} \rightarrow e^{-i\phi} \eta_{i,k}$  (または  $a_{i,k} \rightarrow e^{i\phi} a_{i,k}$ ,  $\tilde{a}_{i,k} \rightarrow e^{-i\phi} \tilde{a}_{i,k}$ )のもとで不変である。Feshbach & Tikochinsky (1977) では対称性は  $SU(1,1)$  だった。この違いは、真空の安定性の違いに反映する。

真空は

$$a_{i,k} |0\rangle = \langle 0 | \tilde{a}_{i,k} = 0 \quad (4.13)$$

によって定義される。ここで  $\langle 0 |$  は  $|0\rangle$  の時間反転共役状態である。Hilbert 空間は規格化された固有状態  $\tilde{a}_{i,k}^n |0\rangle / \sqrt{n!}$  と  $\langle 0 | a_{i,k}^n / \sqrt{n!}$  で張る。部分ハミルトニアンの固有値  $-i\hbar n \lambda_{i,k}$  は純虚数である。任意の状態の時間反転共役は  $\tilde{a}_{i,k}(t) \leftrightarrow a_{i,k}(t)$  の置き換えと、他の係数— Hilbert 空間のベクトル—の複素共役をとって得られる。

$\zeta$ -表示の真空状態は

$$\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left[ \sqrt{\frac{\gamma_k \delta_k^{(0)}}{2}} \zeta_{i,k} + \sqrt{\frac{2}{\gamma_k \delta_k^{(0)}}} \frac{\partial}{\partial \zeta_{i,k}} \right] \psi_0(\zeta_{i,k}) = 0$$

の解として与えられる。これを基に、 $\hat{H}_{B,i}$  の一般の固有関数は  $\zeta$ -表示で

$$\psi_{i,n}(\zeta_{i,k}, t) = (n!)^{-1/2} e^{-n\lambda_{i,k}t} H_n \left( \left( 2\gamma_k \delta_k^{(0)} / \hbar \right)^{1/2} \zeta_{i,k} \right) \psi_0(\zeta_{i,k}) \quad (4.14)$$

となる。 $H_n$  は Hermite 多項式である。特に  $\zeta$ -表示での真空は

$$\psi_0(z) = A_0^{-1/2} e^{-\gamma_k \delta_k^{(0)} z^2 / (2\hbar)} \quad (4.15a)$$

$$\int_C \tilde{\psi}_0(\zeta_{i,k}, t) \psi_0(\zeta_{i,k}, t) d\zeta_{i,k} = 1 \quad (4.15b)$$

である。積分経路  $C$  としては、 $\left( 2\gamma_k \delta_k^{(0)} / \hbar \right)^{1/2} \zeta_{i,k}$  が実数になるように選ぶのが最も簡単である。 $\gamma_k \delta_k^{(0)}$  が正の時は、これは  $C$  が複素  $\zeta_{i,k}$  面の実軸であることを意味する。このとき

$$|A_0| = \left( \pi \hbar / \left( \gamma_k \delta_k^{(0)} \right) \right)^{1/2} \quad (4.16)$$

となる。 $A_0$  の位相は規格化条件からは決まらない。もしも  $\gamma_k \delta_k^{(0)}$  が複素数でその位相が  $\theta$  だつ

たとすると,  $C$  は実軸と角度  $-\theta/2$  で交わる直線とすればよい。積分路のこのような変更は, モデルパラメータを複素数に拡張するときに必要になる。内積は互いに時間反転共役な状態の間でとる。

全ハミルトニアンは

$$\hat{H}_B = -i\hbar \sum_{i,k} \lambda_{i,k} n_{i,k}, \quad n_{i,k} = \tilde{a}_{i,k}(0) a_{i,k}(0) \quad (4.17)$$

と, 粒子数演算子  $n_{i,k}$  で表される。固有状態は  $n_{i,k}$  の固有値の組  $(m, n)$  で指定される。波数ベクトルが  $\mathbf{k}$  の全波動関数は

$$\psi_{m,n}(\zeta_{1,k}, \zeta_{2,k}, t) = \psi_{1,m}(\zeta_{1,k}, t) \psi_{2,n}(\zeta_{2,k}, t) \quad (4.18)$$

で与えられる。(4.17) は

$$\hat{H}_B = -i\hbar \sum_{i,k} \lambda_{i,k} n_{i,k} = -i\hbar \sum_k \left( \frac{\gamma_k}{2m} (n_{1,k} + n_{2,k}) + \frac{\gamma_k \delta_k^{(0)}}{2m} (n_{1,k} - n_{2,k}) \right)$$

と書ける。Feshbach-Tikochinsky ハミルトニアン (Feshbach & Tikochinsky 1977) 同様,  $O(2)$  対称性は  $\delta_k^{(0)}$  が破る。しかしこのことは系の不安定性の原因とならない。なぜなら, 我々のモデルでは  $\hat{H}_B$  は系のエネルギーではないからである。

Heisenberg 方程式は

$$\hbar \dot{a}_{i,k} = -i[a_{i,k}, \hat{H}_B], \quad \hbar \dot{\tilde{a}}_{i,k} = -i[\tilde{a}_{i,k}, \hat{H}_B] \quad (4.19)$$

である。Green 関数  $G_k(t)$  は次のように計算される:

$$\begin{aligned} G_k(t) &\equiv \frac{\delta_k}{\hbar} \langle 0 | T \zeta_k(t) \zeta_k(0) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2\gamma_k} \left[ \theta(t) (e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}) + \theta(-t) (e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}) \right] \end{aligned} \quad (4.20a)$$

$$\left( m \frac{d^2}{dt^2} + \gamma_k \frac{d}{dt} + \kappa_k \right) G_k(t) = \delta(t), \quad t \geq 0_- \quad (4.20b)$$

$t > 0$  で系が外場  $J(t)$  と接触したとすると,  $\zeta_k^{(0)}(t)$  を斉次方程式の解として, 一般解は

$$\zeta_k(t) = \zeta_k^{(0)}(t) + \int_0^\infty G_k(t-t') J(t') dt' \quad (4.21)$$

で与えられる。

あとの便宜のために  $G_k(t)$ ,  $t > 0$ , の Fourier 変換を求めておく。 $\bar{k} > 1$  に対し

$$\tilde{g}_k^{(0)}(\omega) \equiv \int_0^\infty g_k^{(0)}(t) \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_{1,k}}{\omega^2 + \lambda_{1,k}^2} + \frac{\lambda_{2,k}}{\omega^2 + \lambda_{2,k}^2} \right) \quad (4.22a)$$

$$g_k^{(o)}(t) \equiv \frac{e^{-\lambda_1 k t} + e^{-\lambda_2 k t}}{2} \quad (4.22b)$$

過減衰の場合は,  $\tilde{g}_k^{(o)}(\omega)$  は  $\omega=0$  で最大値をとる単調減少関数である。これは共鳴振動がないことを意味する。(4.22) は  $\bar{k}=1$  でも定義されていて, (3.4a) によって粘弾性の Maxwell モデルを表していることに注意せよ。

## 5. 過減衰領域での量子化と分散関係

ここでは波数ベクトルは  $\bar{k}=|\mathbf{k}|/k_0 < 1$  ( $k_0=2\sqrt{m\kappa}/\gamma$ ) であり, 減衰率は複素数になる。過減衰系の場合において  $\sqrt{1-w_k}$  だった部分を  $i\sqrt{w_k-1}$  と置き換えれば, 過減衰系の結果をほぼそのまま利用することができる。

$$\lambda_{i,k} = \frac{\gamma_k}{2m} \left( 1 \pm i\delta_k^{(u)} \right) = \frac{2\kappa}{\gamma} \left( \bar{k}^2 \pm i\bar{k}\sqrt{1-\bar{k}^2} \right), \quad (i=1, 2) \quad (5.1)$$

ここで  $\delta_k^{(u)} \equiv \sqrt{w_k-1}$ 。  $(\gamma_k/2m)\delta_k^{(u)}$  は換算角周波数ともいう。以後, (5.1) の上(下)の符号は  $i=1(2)$  で表すことにする。部分系の正準運動量は

$$\Pi_{i,k}^{\xi} = \pm i \frac{\gamma_k \delta_k^{(u)}}{2} \eta_{i,k}, \quad \Pi_{i,k}^{\eta} = \mp i \frac{\gamma_k \delta_k^{(u)}}{2} \xi_{i,k} \quad (5.2a)$$

$$\gamma_k \delta_k^{(u)} = \frac{4m\kappa}{\gamma} \bar{k} \sqrt{1-\bar{k}^2} \quad (5.2b)$$

である。変数の時間変化を次のようである：

$$(\xi_{1,k}, \eta_{1,k}) = \sqrt{\frac{\hbar}{\gamma_k \delta_k^{(u)}}} \left( e^{-\lambda_1 k t} a_{1,k}(0), e^{\lambda_1 k t} \tilde{a}_{1,k}(0) \right) \quad (5.3a)$$

$$(\Pi_{1,k}^{\xi}, \Pi_{1,k}^{\eta}) = \frac{i}{2} \sqrt{\hbar \gamma_k \delta_k^{(u)}} \left( e^{\lambda_1 k t} \tilde{a}_{1,k}(0), -e^{-\lambda_1 k t} a_{1,k}(0) \right) \quad (5.3b)$$

$$(\xi_{2,k}, \eta_{2,k}) = i \sqrt{\frac{\hbar}{\gamma_k \delta_k^{(u)}}} \left( e^{-\lambda_2 k t} a_{2,k}(0), e^{\lambda_2 k t} \tilde{a}_{2,k}(0) \right) \quad (5.3c)$$

$$(\Pi_{2,k}^{\xi}, \Pi_{2,k}^{\eta}) = \frac{1}{2} \sqrt{\hbar \gamma_k \delta_k^{(u)}} \left( e^{\lambda_2 k t} \tilde{a}_{2,k}(0), -e^{-\lambda_2 k t} a_{2,k}(0) \right) \quad (5.3d)$$

部分系のハミルトニアンは,  $\lambda_{i,k}$  を (5.1) として (4.12) で与えられる。

$\gamma \rightarrow 0$  の極限で  $\lambda_{i,k} \rightarrow \pm i\sqrt{\kappa/m} |\mathbf{k}|$  かつ  $\gamma_k \delta_k^{(u)} \rightarrow 2\sqrt{m\kappa} |\mathbf{k}|$  である。したがって, 我々の  $U(1) \times U(1)$  表示は散逸無し of 極限で弾性理論に連続的に移る。

前と同様, ここで  $\zeta$ -表示に移行する。座標に対しては

$$\begin{aligned}
 \zeta_{1,k} &= \frac{\xi_{1,k} + \eta_{1,k}}{\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\gamma_k \delta_k^{(u)}}} \left( e^{-\lambda_1 k t} a_{1,k}(0) + e^{\lambda_1 k t} \tilde{a}_{1,k}(0) \right) \\
 \zeta_{2,k} &= \frac{\xi_{2,k} - \eta_{2,k}}{\sqrt{2}} \\
 &= i \sqrt{\frac{\hbar}{2\gamma_k \delta_k^{(u)}}} \left( e^{-\lambda_2 k t} a_{2,k}(0) - e^{\lambda_2 k t} \tilde{a}_{2,k}(0) \right)
 \end{aligned} \tag{5.4a}$$

共役運動量に対しては

$$\begin{aligned}
 \Pi_{1,k} &= \frac{\Pi_{1,k}^\xi + \Pi_{1,k}^\eta}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar \gamma_k \delta_k^{(u)}}{2}} \left( e^{\lambda_1 k t} \tilde{a}_{1,k}(0) - e^{-\lambda_1 k t} a_{1,k}(0) \right) \\
 \Pi_{2,k} &= \frac{\Pi_{2,k}^\xi - \Pi_{2,k}^\eta}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar \gamma_k \delta_k^{(u)}}{2}} \left( e^{\lambda_2 k t} \tilde{a}_{2,k}(0) + e^{-\lambda_2 k t} a_{2,k}(0) \right)
 \end{aligned} \tag{5.4b}$$

線形結合は、(4.5)とは異なったとりかたをしている。これは、演算子  $a_{i,k}$  と  $\tilde{a}_{i,k}$  による座標と共役運動量の表現形が  $\delta_k^{(o)}$  と  $\delta_k^{(u)}$  の部分だけ異なるようにしたためである。そのために、波動関数は(4.14)で  $\delta_k^{(o)}$  を  $\delta_k^{(u)}$  で置き換えたものになる。

交換関係は(4.6)と同じである。全ハミルトニアンは、 $\lambda_{i,k}$  を(5.1)として(4.17)で与えられる。 $O(2)$ 対称性は  $\delta_k^{(u)}$  によって破れる。

自己相関関数は、 $\bar{\omega} \equiv (\gamma/2\kappa)\omega$  として

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_k^{(u)}(\omega) &\equiv \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( e^{-\lambda_1 k t} + e^{-\lambda_2 k t} \right) \cos \omega t dt \\
 &= \frac{\gamma}{4\kappa} \left[ \frac{\bar{k}^2}{\left( \bar{\omega} - \bar{k} \sqrt{1 - \bar{k}^2} \right)^2 + \bar{k}^4} + \frac{\bar{k}^2}{\left( \bar{\omega} + \bar{k} \sqrt{1 - \bar{k}^2} \right)^2 + \bar{k}^4} \right]
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

となる。 $\tilde{g}_k^{(u)}(\omega)$  はあたかも分散関係が

$$\bar{\omega}_b(\bar{k}) = \bar{k} \sqrt{1 - \bar{k}^2} \tag{5.6}$$

半値巾が  $\bar{k}^2$  の共鳴を表しているかのようである。しかし、これは  $d\tilde{g}_k^{(u)}(\omega)/d\omega = 0$  の解

$$\bar{\omega}_b(\bar{k}) = \bar{k} \sqrt{2\sqrt{1 - \bar{k}^2} - 1}, \quad 0 \leq \bar{k} \leq \sqrt{3}/2 \tag{5.7}$$

とは異なる。実際の分散関係は(5.7)で与えられる。図3に  $\bar{\omega}_b(\bar{k})$  と  $\bar{\omega}_b(\bar{k})$  の  $\bar{k}$  依存性を

示している。

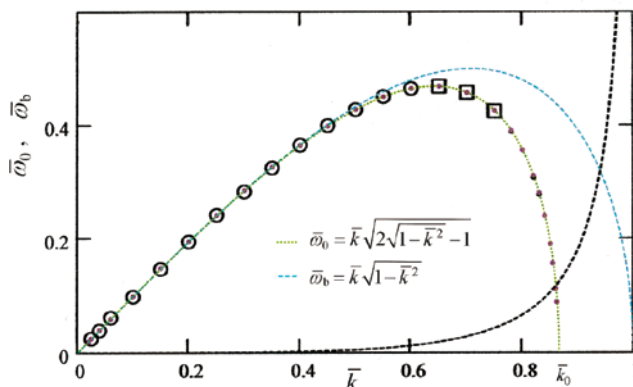


図 3. 過少減衰 Bateman 系の分散関係。3 種の記号はピークの鋭さを表す指標  $r_p \equiv \left| \frac{\tilde{g}_k^{(u)}(0)}{\tilde{g}_k^{(u)}(\bar{\omega}_0(\bar{k}))} \right|$  の違いを表す。 $r_p$  が小さいほどピークは鋭い。点付き丸： $r_p < 0.67$ ，点付き四角： $0.67 < r_p < 0.9$ ，点： $r_p > 0.9$ 。点線： $\bar{\omega}_0(\bar{k})$ ，波線（水色）： $\bar{\omega}_b(\bar{k})$ ，波線（黒）： $\langle n_\alpha(\mathbf{k}) \rangle$ （第 6 節参照）。

$\bar{k} < 0.5$  で  $\bar{\omega}_0(\bar{k})$  と  $\bar{\omega}_b(\bar{k})$  はほぼ直線的でかつほぼ重なる。 $\bar{k} \approx 0.6$  を超えると、 $\bar{\omega}_0(\bar{k})$  は  $\bar{\omega}_b(\bar{k})$  より早く 0 に向かって減少し始める。0 になる波数は  $\bar{k} = \bar{k}_0 \equiv \sqrt{3}/2 = 0.8660\dots$  である。この下方への曲がりには、凝集  $a$  粒子 ( $\tilde{a}_k, a_k$  で生成，消滅する物理的実体をこう呼ぶことにする) へのエネルギー分配によるものと解釈される<sup>6</sup>。短波長で 0 モードが優勢になるのは、微細な変位や破壊と関係があると思われる。

異なったモードへのエネルギー配分によって共鳴のピークは巾を持つようになる。今の場合，その巾の広がり程度は  $r_p \equiv \left| \frac{\tilde{g}_k^{(u)}(0)}{\tilde{g}_k^{(u)}(\bar{\omega}_0(\bar{k}))} \right|$  によって知ることができる。 $r_p$  が  $\bar{k}$  と共に増加していく傾向は図 3 に示されている。 $\bar{k}_0$  を超えると  $\tilde{g}_k^{(u)}(\omega)$  は  $\omega = 0$  で最大になる。これは振動そのものが起きなくなるということではない。 $\bar{k}_0$  より上でも (5.5) の極  $\bar{k} \sqrt{1 - \bar{k}^2} \pm i\bar{k}^2$  は実部を持つ。実際には，スペクトルは連続的になるのである。 $\bar{k} = 1$  を超えると，運動は完全に散逸的になる。

## 6. 波動関数の統合的表現と“幾何学的位相”

### 6.1 波動関数の統合

我々は，前節と前々節で過少減衰と過減衰の両領域で波動関数を決定し，それが共に調和振動子と同じ型 (4.14) であることを知った。両者を統合した形は次の通りである：

<sup>6</sup> 波数が増加すると共に分散関係が下方に曲がり出す現象は液体ヘリウムでも観測されている。この場合は量子化された渦“ロトン”の生成によるものと解釈されている (キッテル 1972 を参照)。

$$\psi_{i,n}(\zeta_{i,k}, t) = (n!)^{-1/2} e^{-n\lambda_{i,k}t} H_n\left((2R_k/\hbar)^{1/2} \zeta_{i,k}\right) \psi_0(\zeta_{i,k}) \quad (6.1a)$$

$$\psi_0(\zeta_{i,k}) = (R_k/(\pi\hbar))^{1/4} e^{-R_k\zeta_{i,k}^2/(2\hbar)} \quad (6.1b)$$

$$R_k \equiv \gamma_k \delta_k = \frac{4m\kappa}{\gamma} \bar{k} (\bar{k}^2 - 1)^{1/2} \quad (6.1c)$$

$$\lambda_{i,k} = \frac{2\kappa}{\gamma} \left( \bar{k}^2 \pm \bar{k} (\bar{k}^2 - 1)^{1/2} \right) \quad (6.1d)$$

ここで  $R_k^{1/2} \zeta_{i,k}$  は実数であるように  $\zeta_{i,k}$  の位相を決める。こうして、 $\bar{k}$  に対する制限を取り払うことができた。 $\bar{k} < 1$  のときは  $(\bar{k}^2 - 1)^{1/2}$  を  $i(1 - \bar{k}^2)^{1/2}$  とすればよい。(6.1) を Feshbach & Tikochinsky (1977), Celeghini et al. (1992), Blasone & Jizba (2004) の波動関数と比べれば、我々の  $U(1) \times U(1)$  表現がその単純さにおいて優れていることが分かる。もちろん、物理的内容も異なっている。

## 6.2 幾何学的位相

(6.1b) と (6.1c) から、波動関数には因子  $(\bar{k} - 1)^{1/8}$  があり、臨界点  $\bar{k} = 1$  では定義できない。これは Bateman 系の一般的特性である。(6.1d) からわかるように、臨界点は減衰率の分岐点になっていて、ここで2つの分岐は交差する。すなわち、通常、“準位交差”と呼ばれる現象が起きている<sup>7</sup>。準位交差は、Berry の定理によって一般には非自明な“幾何学的位相”と結びつけられる。要点は、ハミルトニアンのパラメータ  $\mathbf{R}$  がパラメータ空間内の閉じた曲線  $\mathcal{C}$  の上を断熱的に動いてまた元に戻ったとき、波動関数が  $\mathcal{C}$  に依存する位相因子だけ変化しているということである。考え方は以下の通りである (Berry 1984)。

パラメータ  $\mathbf{R}$  を持つハミルトニアン  $H(\mathbf{R})$  において、 $\mathbf{R}$  を  $t=0$  から時間と共にゆっくりと変化させ  $t=T$  でもとに戻すことを考える。このときのパラメータ空間内の軌道が  $\mathcal{C}$  である。各瞬間における Schrödinger 方程式

$$i\hbar \psi_n = H(\mathbf{R}(t)) \psi_n$$

で、固有値と規格化された固有解を  $E_n(\mathbf{R}(t))$ ,  $|n, \mathbf{R}(t)\rangle$  とする。この方程式は一般に可積分でない。 $\mathbf{R}(t)$  が時間に依存しない場合は、波動関数の時間依存性は  $\psi_n(t) = e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(0)$  であるから、 $\mathbf{R}(t)$  が時間に依存する場合の解として

<sup>7</sup> 準位交差は、普通はエネルギー準位の交差を意味する。Bateman 系のハミルトニアンはエネルギーではないのでその固有値  $\lambda_{i,k}$  もエネルギーではないが、本稿ではこの語句を用いる。

$$\psi_n(t) = \exp\left[-(i/\hbar) \int_0^t E_n(\mathbf{R}(t')) dt'\right] e^{i\Gamma(t)} |n, \mathbf{R}(t)\rangle$$

を仮定しよう。幾何学的位相と呼ばれる位相因子  $\Gamma(\mathbf{T}) = \Gamma(\mathbf{C})$  がこれから求めるべきものである。これを Schrödinger 方程式に代入すると

$$(E_n(\mathbf{R}(t)) - \hbar \dot{\Gamma}(t)) \psi_n(t) + i\hbar \exp\left[-i \int_0^t E_n(\mathbf{R}(t')) dt'\right] e^{i\Gamma(t)} \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}(t)\rangle \cdot \dot{\mathbf{R}} = E_n(\mathbf{R}(t)) \psi_n(t)$$

これを整理して

$$\dot{\Gamma}(t) |n, \mathbf{R}(t)\rangle - i \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}(t)\rangle \cdot \dot{\mathbf{R}} = 0$$

$|n, \mathbf{R}(t)\rangle$  との内積をとった後に時間積分をパラメータ空間内の閉じた経路  $\mathbf{C}$  上で実行して (図 4)

$$\Gamma(\mathbf{C}) = i \oint_{\mathbf{C}} \langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}\rangle \cdot d\mathbf{R} \quad (6.2)$$

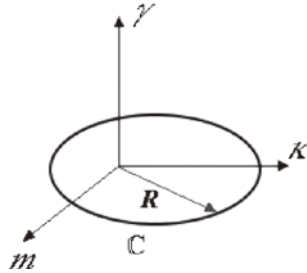


図 4. パラメータ空間内での積分経路  $\mathbf{C}$ 。

Stokes の定理を使い、これは次のように変形できる：

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{C}) &= i \int_S \nabla_{\mathbf{R}} \times \langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}\rangle \cdot d\mathbf{S} \\ &= i \int_S \nabla_{\mathbf{R}} \langle n, \mathbf{R} | \times \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}\rangle \cdot d\mathbf{S} \\ &= i \int_S \sum_m \nabla_{\mathbf{R}} \langle n, \mathbf{R} | m, \mathbf{R}\rangle \times \langle m, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}\rangle \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

$S$  は  $\mathbf{C}$  を境界とする面である。上の式で、右辺の  $\nabla_{\mathbf{R}}$  は量子数  $n$  の状態にのみ作用する。明らかに  $m \neq n$  の状態が右辺に寄与する。ここで  $m \neq n$  に対する次の等式を使う：

$$\nabla_{\mathbf{R}} \langle n, \mathbf{R} | m, \mathbf{R}\rangle = -\frac{\langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} H | m, \mathbf{R}\rangle}{E_m - E_n}, \quad \langle m, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} |n, \mathbf{R}\rangle = \frac{\langle m, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} H | n, \mathbf{R}\rangle}{E_m - E_n}$$

\*最初の式は以下のようにして導かれる。 $n \neq m$  のとき  $\langle n | m \rangle = 0$  なので  $\langle n | H | m \rangle = 0$  である。これらの式の両辺を  $\mathbf{R}$  で微分して



$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{R}} \langle n, \mathbf{R} |) | m, \mathbf{R} \rangle + \langle n, \mathbf{R} | (\nabla_{\mathbf{R}} | m, \mathbf{R} \rangle) &= 0 \\ (\nabla_{\mathbf{R}} \langle n, \mathbf{R} |) H | m, \mathbf{R} \rangle + \langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} H | m, \mathbf{R} \rangle + \langle n, \mathbf{R} | H \nabla_{\mathbf{R}} | m, \mathbf{R} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

である。すべての  $n$  について  $H | n \rangle = E_n | n \rangle$ ,  $\langle n | H = \langle n | E_n$  であるから 2 番目の式は

$$E_m (\nabla_{\mathbf{R}} \langle n, \mathbf{R} |) | m, \mathbf{R} \rangle + E_n \langle n, \mathbf{R} | (\nabla_{\mathbf{R}} | m, \mathbf{R} \rangle) = -\langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} H | m, \mathbf{R} \rangle$$

となる。これに 1 番目の式を用いると

$$(E_m - E_n) \nabla_{\mathbf{R}} \langle n, \mathbf{R} | m, \mathbf{R} \rangle = -\langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} H | m, \mathbf{R} \rangle$$

となり求める関係式が得られる。左辺の  $\nabla_{\mathbf{R}}$  は  $\langle n, \mathbf{R} |$  にのみ作用する。

したがって

$$\Gamma(\mathbb{C}) = -i \int_{\mathbb{S}} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n, \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} H | m \rangle \times \langle m | \nabla_{\mathbf{R}} H | n, \mathbf{R} \rangle}{(E_m - E_n)^2} \cdot d\mathbf{S}$$

という Berry の定理を得る。異なる準位の固有値が一致するようなパラメータ空間内の点があれば、そこから  $\Gamma(\mathbb{C})$  への非自明な寄与が生じるだろう。

$|n, \mathbf{R}\rangle$  はパラメータ空間内での状態ベクトルの移動を規定する。 $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} + \delta\mathbf{R}$  に対し状態が  $|n, \mathbf{R}\rangle \rightarrow |n, \mathbf{R}\rangle + \delta|n, \mathbf{R}\rangle$  と変化したとする。平行移動によって内積は不変なので

$$\langle n, \mathbf{R} | \delta|n, \mathbf{R}\rangle = 0$$

である。この移動で状態が  $\delta|n, \mathbf{R}\rangle = i d\Gamma |n, \mathbf{R}\rangle + d|n, \mathbf{R}\rangle$  のように新たに非可積分の位相を生みながら変化するならば

$$d\Gamma = i \langle n, \mathbf{R} | d|n, \mathbf{R}\rangle = i \langle n, \mathbf{R} | \nabla |n, \mathbf{R}\rangle \cdot d\mathbf{R}$$

である。これを積分したものが (6.2) である。

このように、閉じた経路上でのベクトルの移動は回転を生む。図 5 から分かるように、回



図 5. 曲面上の平行移動は回転を伴う。ある方向を向いた矢印があって、A を出発して B → C → A と平行移動し、元に戻ると矢印は向きを変えている。

転の大きさと向きは経路によって決まるので、閉経路と回転を対応させることができる。これをホロノミーと呼ぶ。特に、経路を辿って元に戻ったとき向きが変わる現象をアンホロノミーということがある。向き付けした経路の集合は、要素間に積を定義すれば回転群と同型で、ホロノミー群と呼ばれる群をつくる。“幾何学的位相”は、パラメータ空間上のホロノミー群におけるアンホロノミー現象に他ならない。

物理に話を戻すと、位相生成の結果を得るのには、ハミルトニアンが時間発展を生成することと、状態が規格化可能であることだけが必要である。ハミルトニアンがエルミットである必要はない。Bateman ハミルトニアンも波動関数もこの条件を満たす。また、量子数が同じで互いに時間反転共役な状態の単位は臨界点で同一値をとる。すなわちレベル交差が起きる。Bateman 系でも幾何学的位相が生じることが予想される。

簡単のため基底状態、すなわち (6.1) で  $n=0$  の状態を取り上げる。モデルパラメータ依存性は  $R_k$  を通して現れる。そこで、ある一つの  $k$  に対し (6.2) に基づいて

$$\Gamma = i \oint \int \Pi_i \tilde{\psi}_0(\zeta_{i,k}) [\partial \Pi_i \psi_0(\zeta_{i,k}) / \partial R_k] d\zeta_{i,k} dR_k \quad (6.3)$$

を計算しよう。(6.3) では、まず  $\zeta_{i,k}$  積分を  $R_k$  を固定して実行し、次いで  $R_k$  積分を分岐点

$$R_k = 0 \quad (6.4)$$

を避けるように行う。(6.1c) より、積分路は  $\bar{k}=1$  を囲んでいる。また、パラメータ空間内を 1 周する (一般に  $l$  を整数として  $l$  周するが、ここでは簡単のため  $|l|=1$  とする) ということは、パラメータの位相が 0 から  $2\pi$  まで変化するとき、 $R_k$  の位相は 0 から  $\pi$  または  $-\pi$  まで変化するということである。 $R_k$  を  $\bar{k}=1$  (すなわち  $k_0=|k|$ ) のまわりに巾展開すると、(6.1c) より

$$R_k \approx \frac{4\sqrt{2}m\kappa}{\gamma} (\bar{k}-1)^{1/2} = \frac{4\sqrt{2}m\kappa}{\gamma\sqrt{k_0}} (|k|-k_0)^{1/2}, \quad k_0 = \frac{2(m\kappa)^{1/2}}{\gamma}$$

となる。パラメータ空間でループを 1 周することにして、またパラメータを複素数にしてもハミルトニアンが時間並進を生成するという性質は変わらないことに注意して  $m \rightarrow m + m\varepsilon_1 e^{i\theta}$ ,  $\kappa \rightarrow \kappa + \kappa\varepsilon_2 e^{i\theta}$ ,  $\gamma \rightarrow \gamma + \gamma\varepsilon_3 e^{\pm i\theta}$  とおいて

$$k_0 \rightarrow k_0 \left( 1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} e^{i\theta} - \varepsilon_3 e^{\pm i\theta} \right)$$

となる。簡単のために  $m-\kappa$  面に平行な面での積分を実行することにして  $\varepsilon_3 = 0$  とおくと

$$R_k \approx \frac{4\sqrt{2}m\kappa}{\gamma\sqrt{k_0}} \sqrt{k_0 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}} e^{i\theta/2} \equiv \varepsilon e^{i\theta/2}$$

このことから  $\varepsilon$  を定数として  $R_k = \varepsilon e^{i\theta/2}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , 積分要素  $dR_k$  は  $(iR_k/2)d\theta$  とおくことができる。 $\bar{k} = 1$  に対応する一つの波数だけを選択的に取り囲む必要があるので,  $\varepsilon$  は大きすぎてはいけない。系の典型的なサイズを  $L$  とすると, 隣接する  $k$  までは  $O(2\pi/L)$  だけ離れているので, 積分路  $C$  の大きさに対応する波数変化の大きさ  $\Delta k$  は  $\Delta k < O(2\pi/L)$  でなければならない。(6.1c) より

$$\varepsilon \sim \frac{4m\kappa}{\gamma} \frac{\sqrt{2}}{2} (\Delta k)^{1/2} \sim \frac{2\sqrt{2}m\kappa}{\gamma} \left( \frac{\Delta k}{k_0} \right)^{1/2}$$

であるから

$$\varepsilon < \frac{2(m\kappa)^{3/4}}{\gamma^{1/2}} O\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{1/2}$$

のように  $\varepsilon$  をとればよい。

第3節で, 我々は  $R_k \zeta_{i,k}^2$  は実数になるように積分路を選んだ。したがって,  $\theta$  依存性は波動関数の振幅  $(R_k / (\pi\hbar))^{1/4}$  のみから現れる。すると  $\Gamma$  は

$$\begin{aligned} \Gamma &= i \oint \int \left( \frac{R_k^*}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{R_k}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-R_k(\zeta_{1,k}^2 + \zeta_{2,k}^2)/\hbar} d\zeta_{1,k} d\zeta_{2,k} d\theta \\ &= -\frac{1}{8} \oint d\theta = -\frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (6.5)$$

のように求められる。この結果は, Blasone & Jizba (2004) が Bateman 系の  $O(2,1)$  または  $SU(1,1)$  表現 (Feshbach & Tikochinsky 1977, Celeghini et al. 1992) のもとで得られる規格化不可能な波動関数に対して求めた “Berry-Anandan 位相” の  $1/4$  の値である (Takahashi 2019)。

連続体では, (6.4) を満たす複数の  $k$  が存在する。1次元では,  $k$  が (6.4) を満たせば  $-k$  も (6.4) を満たす。分岐点 (6.4) を囲む自由度は2倍になるので  $\Gamma$  も2倍になる:

$$\Gamma = -\frac{\pi}{2}, \quad (1 \text{次元}) \quad (6.6)$$

この結果は, 振れがある1次元媒体中で進行波が偏極していれば観測可能な効果をもたらすであろうことを示している (Berry 1987)。高次元では,  $\Gamma$  は  $-2\pi$  の整数倍で, 観測にかかる効果を生じない。

まとめると, 幾何学的位相はハミルトニアン の準位交差に応じて現れ, 1次元の場合に非自明な効果をもたらす。

## 7. エネルギーの定義と基底状態および粒子数

これまでの議論で、ハミルトニアン  $\hat{H}_B$  は臨界点を除き 2つの分岐から構成されること、固有値は過減衰領域では虚数、過少減衰領域では複素数であり虚部が換算角周波数を与えることを見た。換算角周波数 reduced frequency は次式で与えられる：

$$\text{Im}(\lambda_{i,k}) = \pm \frac{1}{2m} \sqrt{4m\kappa_k - \gamma_k^2} \quad (\bar{k} < 1)$$

2つの固有値は  $\bar{k} = 1$  で一致し  $-2i\kappa/\gamma$  となる。

$\hat{H}_B$  は時間並進を生成するが、力学エネルギーではない。物理現象の理解にエネルギーの同定は大変有益なのだが、あいにく Bateman 系のエネルギーを決める正準的な方法は存在しない。議論をさらに進めるためには、一度古典力学に立ち戻るのがよい。

古典力学では、観測変数は位置が  $\zeta_k$ 、速度は  $\dot{\zeta}_k$  である。物理的に意味のある理論を構成するには、これらの  $\zeta$  表示 (4.5), (4.7) をもとに  $\zeta$  表示のエネルギーをつくる必要がある。

古典力学との類比で、エネルギー演算子として運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和をつくろう。座標と運動量は (4.7a) と (4.7b) で与えられるので、エネルギーは

$$\begin{aligned} \hat{K}(t) &\equiv \sum_k \left( \frac{1}{2m} \Pi_k(t) \Pi_{-k}(t) + \frac{\kappa_k}{2} \zeta_k(t) \zeta_{-k}(t) \right) \\ &= \sum_k \hbar \sqrt{\frac{\kappa}{m}} |\mathbf{k}| \left( \tilde{A}_k(t) A_k(t) + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.1)$$

となる。1行目の括弧の中の第1項が運動エネルギー、第2項がポテンシャルエネルギーである。ここで

$$\begin{aligned} A_k(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( (m\kappa_k)^{-1/4} \Pi_{-k}(t) - i(m\kappa_k)^{1/4} \zeta_k(t) \right) \\ \tilde{A}_k(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( (m\kappa_k)^{-1/4} \Pi_k(t) + i(m\kappa_k)^{1/4} \zeta_{-k}(t) \right) \end{aligned} \quad (7.2)$$

同時交換関係は

$$[A_k(t), \tilde{A}_{k'}(t)] = \delta_{k,k'} . \quad (7.3)$$

である。他は 0 になる。(7.1) と (7.3) より、 $A_k(t)$  と  $\tilde{A}_k(t)$  は波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の準粒子の消滅と生成の演算子である事が推測できる。

### 7.1 エネルギー：過減衰領域

過減衰なので  $w_k < 1$  である。基底状態  $|\mathbf{0}; t\rangle$  を

$$\text{すべての } \mathbf{k} \text{ に対し } A_k(t) |\mathbf{0}; t\rangle = 0 \quad (7.4)$$

によって定義する。この状態は時間に依存する。すると  $\hat{K}$  の固有状態は

$$|\{n_k, \mathbf{k}\}\rangle = \prod_k \tilde{A}_k(t)^{n_k} / \sqrt{n_k!} |\mathbf{o}; t\rangle \quad (7.5a)$$

$$\hat{K} |\{n_k, \mathbf{k}\}\rangle = \hbar \sum_k n_k \omega_k |\{n_k, \mathbf{k}\}\rangle \quad (7.5b)$$

$$\omega_k \equiv \sqrt{\kappa/m} |\mathbf{k}| \quad (7.5c)$$

(7.4) と (7.2) より, 基底状態の波動関数は  $\zeta$  表示では

$$\psi_{\mathbf{o}, \mathbf{k}} = \left( \sqrt{m\kappa_k} / \hbar \right)^{1/2} \exp\left( -\sqrt{m\kappa} \zeta_k^2 / 2\hbar \right) \quad (7.6)$$

のすべての  $\mathbf{k}$  についての積で表される。

$\hat{K}$  の固有状態は一般に時間に依存するが, 固有値は時間によらない定数である。エネルギースペクトルは散逸がない弾性体の音響的フォノンのものと一致する。 $\hat{K}$  に散逸を取り入れるためには,  $\zeta_k$  と  $\Pi_k$  の非エルミットな相互作用, またはエネルギーを吸収する環境を表す新たな項が必要である。

大きい自由度で  $\zeta_k$  および/または  $\Pi_k$  とランダムに相互作用する環境または熱浴を系に取り入れる Langevin 方程式の方法がある (Ford et al. 1965, Ford et al. 1988)。あるいは, Bateman 系のように, 環境との相互作用を非線形項で表す方法もある (Kostin 1972, Hasse 1975)。 $\hat{K}$  を拡張して環境の効果を取り入れることは将来の課題であり, この問題は本稿では扱わない。

$A_k$  と  $\tilde{A}_k$  はこれまで用いてきた  $a_{i,k}$  と  $\tilde{a}_{i,k}$  で次のように表される:

$$\begin{aligned} A_k(t) &= \frac{1}{2} \left( D_{+,k}^{(o)} \alpha_k(t) + D_{-,k}^{(o)} \tilde{\alpha}_{-k}(t) \right) \\ \tilde{A}_k(t) &= \frac{1}{2} \left( D_{+,k}^{(o)} \tilde{\alpha}_k(t) + D_{-,k}^{(o)} \alpha_{-k}(t) \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

ここで

$$\alpha_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -i a_{1,k}(t) + a_{2,k}(t) \right), \quad \tilde{\alpha}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i \tilde{a}_{1,k}(t) + \tilde{a}_{2,k}(t) \right) \quad (7.8a)$$

$$D_{\pm,k}^{(o)} = \left( \frac{1-w_k}{w_k} \right)^{1/4} \pm \left( \frac{w_k}{1-w_k} \right)^{1/4} = (\bar{k}^2 - 1)^{1/4} \pm (\bar{k}^2 - 1)^{-1/4} \quad (7.8b)$$

$D_{\pm,k}^{(o)}$  は過減衰領域では実数である。基底状態は, (7.4) と (7.7) から

$$\begin{aligned} |\mathbf{o}; t\rangle &= \prod_k C_k^{1/2} \exp\left[ -\frac{1}{2} R_k \tilde{\alpha}_k(t) \tilde{\alpha}_{-k}(t) \right] |0\rangle \\ \langle \mathbf{o}; t| &= \prod_k C_k^{1/2} \langle 0| \exp\left[ -\frac{1}{2} R_k \alpha_k(t) \alpha_{-k}(t) \right] \end{aligned} \quad (7.9)$$

のように構成される。 $C_k$  は規格化因子で,  $R_k$  は

$$R_k = D_{-,k}^{(0)} / D_{+,k}^{(0)} \quad (7.10)$$

である。一見、 $h(x)$  を任意の正則な関数として  $h(-i\tilde{\alpha}_{1,k}(t) + \tilde{\alpha}_{2,k}(t))$  という因子も  $A_k$  と交換するので許されるように思えるが、 $-i\tilde{\alpha}_{1,k}(t) + \tilde{\alpha}_{2,k}(t)$  は我々が採用した  $\zeta$  表示とは異なった表示に属するので、ここでは使えない。公式  $\langle 0 | \exp(x\alpha_k\alpha_{-k}) \exp(x\tilde{\alpha}_k\tilde{\alpha}_{-k}) | 0 \rangle = (1-x^2)^{-1}$  を使くと  $C_k$  は

$$C_k = 1 - R_k^2, |C_k| < 1 \quad (7.11)$$

で与えられることが分かる。

$$\langle \mathbf{o}; t | 0 \rangle = \prod_k C_k^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2} V \int \ln C_k d\mathbf{k} / (2\pi)^3\right) \quad (7.12)$$

より、体積  $V$  が有限とすると、真空は基底状態の一定の割合を占める。 $V \rightarrow \infty$  のときは、 $\ln C_k < 0$  であるから (7.12) は 0 となる。

$\alpha_k$  粒子 ( $a$  粒子と同様の定義) の数の期待値は

$$\langle \mathbf{o}; t | \tilde{\alpha}_k(t) \alpha_k(t) | \mathbf{o}; t \rangle = R_k^2 \langle \mathbf{o}; t | \alpha_{-k}(t) \tilde{\alpha}_{-k}(t) | \mathbf{o}; t \rangle = R_k^2 \langle \mathbf{o}; t | (1 + \tilde{\alpha}_{-k}(t) \alpha_{-k}(t)) | \mathbf{o}; t \rangle$$

を使って

$$\langle n_\alpha(\mathbf{k}) \rangle \equiv \langle \mathbf{o}; t | \tilde{\alpha}_k(t) \alpha_k(t) | \mathbf{o}; t \rangle = \frac{R_k^2}{1 - R_k^2} = \frac{D_{-,k}^{(0)2}}{4} \quad (7.13)$$

同様に  $a$  粒子 ( $\alpha$  粒子と同様な定義による) の数は

$$\begin{aligned} a_{1,k}(t) | \mathbf{o}; 0 \rangle &= -\left(i/\sqrt{2}\right) R_k e^{-\lambda_1 k t} \tilde{\alpha}_{-k}(t) | \mathbf{o}; 0 \rangle \\ a_{2,k}(t) | \mathbf{o}; t \rangle &= -\left(1/\sqrt{2}\right) R_k e^{-\lambda_2 k t} \tilde{\alpha}_{-k}(t) | \mathbf{o}; 0 \rangle \end{aligned} \quad (7.14)$$

を使って

$$\langle n_\alpha(\mathbf{k}) \rangle = \langle \mathbf{o}; t | n_{i,k} | \mathbf{o}; t \rangle = \frac{R_k^2}{2} \langle \mathbf{o}; t | \alpha_{-k}(t) \tilde{\alpha}_{-k}(t) | \mathbf{o}; t \rangle = \frac{R_k^2}{2(1 - R_k^2)} \quad (7.15)$$

となる。したがって、 $\langle n_\alpha(\mathbf{k}) \rangle = 2 \langle n_a(\mathbf{k}) \rangle$  である。

$D_{\pm,k}^{(0)2}$  は  $\bar{k} \rightarrow 1$  または  $\bar{k} \rightarrow \infty$  で発散し、 $\bar{k} = \sqrt{2}$  で最小値をとる。(ここで  $D_{-,k}^{(0)}$  は 0 になる。) よって、 $\alpha$  粒子数は  $\bar{k}$  が  $1_+$  (臨界点) から  $\sqrt{2}$  を経て  $\infty$  (短波長極限あるいは 0 質量極限) まで増加するにしたがい、 $\infty$  から 0 に減少し再び  $\infty$  に発散する。 $|\mathbf{k}| = \infty$  は現実的でないので、 $\bar{k} = \infty$  を実現する 2 つの可能性が残る。1 つは質量が 0 でもう 1 つは弾性力が存在しないことである。いずれの場合も、運動は振動がない純粋減衰で、フォノンにつくられない。つまり、 $\langle \mathbf{o}; t | n_{i,k} | \mathbf{o}; t \rangle$  が  $\bar{k} = \infty$  で発散するということは、 $a$  粒子あるいは  $\alpha$  粒子が散逸によって生成される Bose 粒子であることを意味する。これらは散逸子 dissipaton と呼ぶのが適当

であろう。

対照的に、臨界点  $\bar{k}=1$  は有限の波数  $|\mathbf{k}|=k_0=2\sqrt{m\kappa}/\gamma$  で実現する。この周辺でもボソン凝縮が起きる。しかし  $\langle \mathbf{o};t|n_{i,k}|\mathbf{o};t \rangle$  は散逸の直接の指標にはならない。それは、 $\langle \mathbf{o};t|n_{i,k}|\mathbf{o};t \rangle$  は  $\bar{k}=\sqrt{2}$  で 0 になるのであるがそこは過減衰領域内で散逸は起きているからである。このことの物理的意味は不明である。

臨界減衰 ( $\bar{k}=1$ ) では、Bateman 系の独立な運動は

$$\xi_k(t) = e^{-|\gamma k/(2m)t}, \quad te^{-|\gamma k/(2m)t} \quad (7.16)$$

である。(7.16) の 1 番目の運動は

$$\dot{\xi}_k + \frac{\gamma k}{2m} \xi_k = 0 \quad (7.17)$$

によって記述されるものであるが、これは Bateman 部分系の散逸方程式である。つまり、ここでも  $\langle \mathbf{o};t|n_{i,k}|\mathbf{o};t \rangle$  の発散が純粹散逸と結びついている事が分かる。(7.16) の 2 番目の解は増加後の減衰を表すので Bateman 部分系とはならず、我々の量子化法には取り入れられない。

$\hat{K}(t)$  は  $|\{n_k\}\rangle = \prod_k \tilde{\alpha}_k^{n_k}(t) / \sqrt{n_k!} |\mathbf{o};t \rangle$  によって張られる Fock 空間に作用する力学エネルギー演算子と見なすことができる。これらの自己相関関数は第 8 節で調べる。

## 7.2 エネルギー：過少減衰領域

過少減衰領域でのエネルギー演算子として、古典力学との類比からここでも (7.1) の表現を採用する。ハミルトニアン固有値  $\lambda_{i,k}$  は (5.1) で与えられる。基本的には、過少減衰領域での物理量は過減衰領域での表示で  $\sqrt{1-w_k} \rightarrow i\sqrt{w_k-1}$  という解析接続の置き換えをすればよい。ただし、座標演算子 (5.4) と運動量演算子 (5.5) をエネルギー演算子 (7.1) に代入すると、過少減衰領域の  $D_{\pm,k}^{(u)}$  は過減衰領域での  $D_{\pm,k}^{(o)}$  で  $1-w_k \rightarrow w_k-1$  の置き換えをしたもので与えられることがわかる。すなわち

$$D_{\pm,k}^{(u)} = \left( \frac{w_k-1}{w_k} \right)^{1/4} \pm \left( \frac{w_k}{w_k-1} \right)^{1/4} = (1-\bar{k}^2)^{1/4} \pm (1-\bar{k}^2)^{-1/4} \quad (7.18)$$

基底状態は、(7.9), (7.10) で  $D_{\pm,k}^{(o)}$  を  $D_{\pm,k}^{(u)}$  で置き換えたものになる。 $|D_{\pm,k}^{(u)}|$  は  $\bar{k}$  が 0 から 1 まで増える間に、最小値 ( $D_{\pm,k}^{(u)}$  は 2,  $D_{\pm,k}^{(u)}$  は 0) から無限大まで単調に増加する。 $\alpha$  粒子の数は (7.13) により  $\langle n_\alpha(\mathbf{k}) \rangle = D_{-,k}^{(u)2} / 4$  となり  $\bar{k} \rightarrow 1$  で発散する。ボソン凝縮である。 $k_0 \equiv 2\sqrt{m\kappa}/\gamma$  なので、 $\bar{k} \rightarrow 1$  は  $\gamma \rightarrow 0$  ならば  $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$  を意味し非物理的である。言い換えれば、ボソン凝縮は散逸率が有限のもとで起きなければならない。ここでのボソンも散逸と

結びついている。

$\bar{k} \rightarrow 0$  の極限で  $D_{-,k}^{(u)}$ , 従って  $\alpha$  粒子の数は 0 である。 $\langle n_\alpha(\mathbf{k}) \rangle$  を  $\bar{k}$  の関数として図 3 に描いておいた。 $\bar{k}$  が 1 に近づくにつれ急激に増大する。全粒子数密度は  $d$  次元で

$$n_\alpha^{(u)} \equiv \frac{k_0^d}{(2\pi)^d} \int_{\bar{k} \leq 1} d^d \bar{k} \langle n_\alpha(\mathbf{k}) \rangle = C_d k_0^d \quad (7.19)$$

$$C_1 = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{3\pi}{4} - 2 \right), \quad C_2 = \frac{1}{24\pi}, \quad C_3 = \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{5\pi}{16} - \frac{2}{3} \right)$$

のようになる。過減衰の場合と同様、 $\alpha$  粒子の数の発散は臨界点で起きる。にもかかわらず、 $A_k$  と  $\tilde{A}_k$  で構成される物理量は全領域で有限である。

## 8. 自己相関関数

### 8.1 過減衰領域

$\hat{K}(t)$  の固有値は時間に依存しないので、散逸はどのように表現されるのかという疑問が生じる。この答を探すために、ここでは基底状態の性質を自己相関関数を頼りに調べる。

$|\mathbf{o}; 0\rangle$  と  $|\mathbf{o}; t\rangle$  の内積は状態を  $R_k$  の級数に展開し、交換関係

$$[\alpha_k(t), \tilde{\alpha}_k(0)] = g_k^{(o)}(t) \quad (8.1)$$

を使って求められる。ここで  $g_k^{(o)}(t)$  は (4.22b) で定義されている。結果は

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle &= \prod_{(k)} C_k^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-R_k)^{n+m}}{n!m!} n!m! \delta_{n,m} g_k^{(o)}(t)^{2n} \\ &= \prod_{(k)} \frac{C_k^2}{1 - R_k^2 g_k^{(o)}(t)^2} \end{aligned} \quad (8.2)$$

となる。ここで、積記号の下の  $(\mathbf{k})$  は、 $\mathbf{k}$  か  $-\mathbf{k}$  のいずれか 1 方のみ含むことを意味する。 $\langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle$  は  $t \rightarrow \infty$  で 0 にならない。(7.12) より

$$\langle \mathbf{o}; \infty | \mathbf{o}; 0 \rangle = |\langle \mathbf{o}; t | 0 \rangle|^2 = \prod_{(k)} C_k^2 \quad (8.3)$$

すなわち、基底状態  $|\mathbf{o}; t\rangle$  は  $t=0$  の情報を完全には失わない ( $\alpha$  粒子の真空  $|0\rangle$  の成分を残し続ける)。この特性は、粘弾性で見られる緩和過程に似ている：初期の負荷による応力変形は時間と共に減少するが完全には無くならない。

無次元の自己相関関数を

$$G_k^{(o)}(t) = \begin{cases} (\gamma_k \delta_k^{(o)} / \hbar) \langle \mathbf{o}; t | \zeta_{-k}(t) \zeta_k(0) | \mathbf{o}; 0 \rangle \langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle^{-1}, & t > 0 \\ (\gamma_k \delta_k^{(o)} / \hbar) \langle \mathbf{o}; 0 | \zeta_{-k}(0) \zeta_k(t) | \mathbf{o}; t \rangle \langle \mathbf{o}; 0 | \mathbf{o}; t \rangle^{-1}, & t < 0 \end{cases} \quad (8.4)$$



で定義する。 $\langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle$  で規格化したのは、基底状態自身の時間変化の効果を取り除くためである。粘弾性の観点からは、 $G_k^{(o)}(t)$  は異なった時刻での応力変形のうちモード  $k$  同士の相関を表す。 $\zeta_{i,k}(t)$  に対する表式 (4.5a), および (7.8a) から  $\zeta_k(t) = \zeta_{1,k}(t) + \zeta_{2,k}(t)$  を

$$\zeta_k(t) = i \sqrt{\frac{\hbar}{\gamma_k \delta_k^{(o)}}} (\alpha_k(t) - \tilde{\alpha}_{-k}(t)) \quad (8.5)$$

と表し、これを (8.4) に代入すると

$$G_k^{(o)}(t > 0) = \frac{(1 + R_k)^2 g_k^{(o)}(t)}{1 - R_k^2 g_k^{(o)}(t)^2} \quad (8.6)$$

を得る。 $g_k^{(o)}(t)$  は (4.22b) で与えられている。ここで下記の公式を使った：

$$\langle \mathbf{o}; t | \tilde{\alpha}_k(t) \alpha_k(0) | \mathbf{o}; 0 \rangle = \langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle \frac{R_k g_k^{(o)}(t)}{1 - R_k^2 g_k^{(o)}(t)^2} \quad (8.7a)$$

$$\langle \mathbf{o}; t | \alpha_k(t) \tilde{\alpha}_k(0) | \mathbf{o}; 0 \rangle = \langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle \frac{g_k^{(o)}(t)}{1 - R_k^2 g_k^{(o)}(t)^2} \quad (8.7b)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{o}; t | \alpha_k(t) \alpha_{-k}(0) | \mathbf{o}; 0 \rangle &= \langle \mathbf{o}; t | \tilde{\alpha}_k(t) \tilde{\alpha}_{-k}(0) | \mathbf{o}; 0 \rangle \\ &= -\langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle \frac{R_k g_k^{(o)}(t)}{1 - R_k^2 g_k^{(o)}(t)^2} \end{aligned} \quad (8.7c)$$

$G_k^{(o)}(t < 0)$  は、(8.6), (8.7) で単に  $t \rightarrow -t$  とすればよい。 $R_k$  は

$$R_k = \frac{\bar{k}^2 - 2}{\bar{k}^2 + 2\sqrt{\bar{k}^2 - 1}} \quad (8.8)$$

となる。 $\bar{k} \rightarrow 1$  で  $R_k \rightarrow -1$  なので、この極限で  $G_k^{(o)}(t)$  は 0 になる。つまり、臨界点ではボソン凝縮は非凝縮成分からの寄与を完全に打ち消すということである。

$G_k^{(o)}(t)$  は指数関数的に減少するだけなので、その Fourier 変換

$$\tilde{G}_k^{(o)}(\omega) \equiv \int_0^\infty G_k^{(o)}(t) \cos(\omega t) dt \quad (8.9)$$

は  $\omega = 0$  にピークの中心がある分布を示す ((4.22) を見よ)。

## 8.2 過少減衰領域

無次元自己相関関数は (8.6) で  $g_k^{(o)}(t)$  と  $D_{\pm k}^{(o)}$  をそれぞれ (4.22) で与えられている  $g_k(t)$  と (7.18) で与えられている  $D_{\pm k}^{(u)}$  で置き換え、さらに  $R_k$  を

$$R_k = \frac{D_{-,k}^{(u)}}{D_{+,k}^{(u)}} = -\frac{1 - \sqrt{1 - \bar{k}^2}}{1 + \sqrt{1 - \bar{k}^2}} \quad (8.10)$$

として得られる。したがって最終的に

$$G_k^{(u)}(t > 0) = \frac{(1 + R_k)^2 g_k^{(u)}(t)}{1 - R_k^2 g_k^{(u)}(t)^2} \quad (8.11a)$$

$$\tilde{G}_k^{(u)}(\omega) = \tilde{G}_k^{(o)}(\omega)|_{\sqrt{1-\omega_k} \rightarrow i\sqrt{\omega_k-1}} \equiv \int_0^\infty G_k^{(u)}(t) \cos(\omega t) dt \quad (8.11b)$$

となる。物理量については、過減衰の  $\lambda_{i,k}$  で  $\sqrt{\bar{k}^2 - 1} \rightarrow i\sqrt{1 - \bar{k}^2}$  の置き換えをすれば過減衰の物理量が求められる。 $\tilde{G}_k^{(u)}(\omega)$  の具体的な関数形を知るには数値計算に依るしかない。

$G_k^{(u)}(t)$  の時間依存性は図 6(a) に例が示されている。振動性の振る舞いはもちろん減衰率の虚部  $\text{Im} \lambda_{i,k} = \pm(2\kappa/\gamma)\bar{k}\sqrt{1 - \bar{k}^2}$  による。 $\bar{k}$  が大きいほど減衰率は大きくなる。

$G_k^{(u)}(t)$  の  $\bar{k}$  依存性を図 6(b) に示した。 $\bar{t}$  が小さいとき、 $G_k^{(u)}(t)$  は単調に減少する。 $\bar{t} > 2.9$  で振動傾向が現れ、時間に依存するある特定の波数の振幅が強化される。 $G_k^{(u)}(t)$  は  $\bar{k} = 1$  で 0 になり、そこで  $G_k^{(o)}(t)$  に連続的に接続する。 $\bar{k} = 1$  ではやはり真空からの寄与と凝縮ボソンからの寄与は完全に打ち消し合うのである。 $\bar{k}$  が小さい領域では  $|R_k|$  も小さく、真空からの寄与が凝縮ボソンの効果を上回る。

分散関係は  $\tilde{G}_k^{(u)}(\omega)$  の最大値の場所を探すことで決められる。そのために、(8.11b) の右辺の数値積分を行い、図 7 の結果を得た。調べた波数  $\bar{k} = 0.2, 0.4, 0.7$  について、 $0 \leq \bar{\omega} < 1$  の間に最大値が存在する。分散関係  $\bar{\omega}(\bar{k})$  は、波数ごとに最大値の位置を求めることで決定できる。結果は既に図 1 に示した通りである。

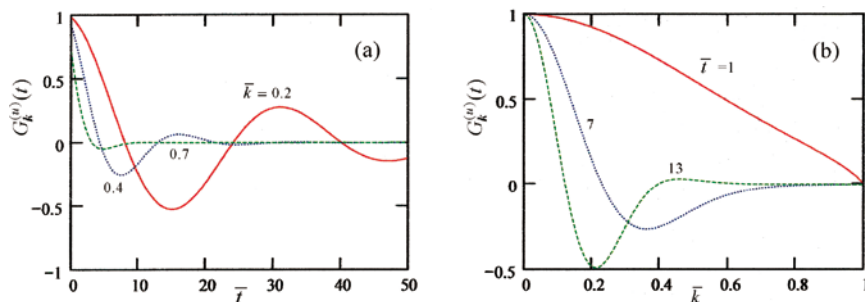


図 6. (a) :  $G_k^{(u)}(t)$  の  $\bar{t} \equiv (2\kappa/\gamma)t$  依存性。 $\bar{k} = 0.2$  (実線),  $0.4$  (点線),  $0.7$  (破線)。(b) :  $G_k^{(u)}(t)$  の  $\bar{k} \equiv k/k_0$  依存性。 $\bar{t} = 1$  (実線), (点線),  $13$  (破線)。分散式では虚部が支配的である。 $\bar{k} \approx 0.8$  を超えると  $G_k^{(u)}(t)$  は振動性をほぼ失う (この図には示されていない)。

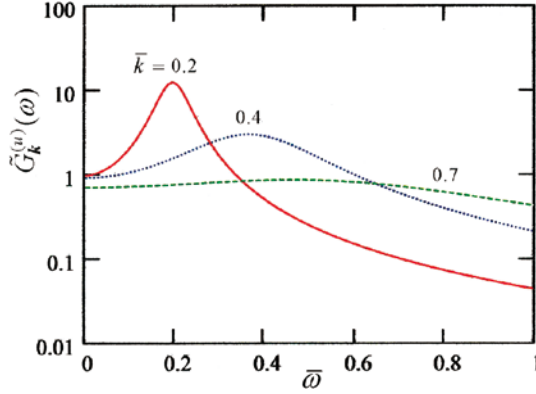


図 7.  $\tilde{G}_k^{(u)}(\omega)$  の  $\bar{\omega} \equiv (\gamma/2\kappa)\omega \geq 0$  への依存性。実線:  $\bar{k}=0.2$ , 点線: 0.4, 破線: 0.7。

注目すべき 2 つの点がある。第 1 に、波数が小さいほど最大値ピークは鋭く、大きくなるに連れてぼやける。角周波数と波数との対応が、短波長ほどぼやけるということである。第 2 に、 $\bar{\omega}(\bar{k})$  の曲線が  $\bar{k}$  の増大とともに真空のもとでの分散式よりも早く下方に曲がる、つまりより早く減少するということである。これは基底状態でのボソン凝縮の効果で、もとを辿れば減衰因子  $\exp(-(\gamma/2m)t)$  の存在によるものである。見かけ上散逸がないエネルギー演算子 (7.1) を出発点として系の分析をしたのであるが、ここで見たように、相関関係の中に散逸は取り入れられているのである。

### 8.3 不確定性関係

これまで、我々は座標変数の相関関数を調べた。過減衰領域の場合を再掲すると、それらは自己相関関数と

$$G_k^{(o)}(t) = \begin{cases} (\gamma_k \delta_k^{(o)} / \hbar) \langle \mathbf{o}; t | \zeta_{-k}(t) \zeta_k(0) | \mathbf{o}; 0 \rangle \langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle^{-1}, & t > 0 \\ (\gamma_k \delta_k^{(o)} / \hbar) \langle \mathbf{o}; 0 | \zeta_{-k}(0) \zeta_k(t) | \mathbf{o}; t \rangle \langle \mathbf{o}; 0 | \mathbf{o}; t \rangle^{-1}, & t < 0 \end{cases} \quad (8.12)$$

の関係にある。  $t > 0$  の場合、上式で  $t \rightarrow 0$  の極限をとると

$$G_k^{(o)}(t > 0) \equiv \frac{\gamma_k \delta_k^{(o)}}{\hbar \langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle} (\Delta \zeta_k)^2 = \frac{(1 + R_k)^2 g_k^{(o)}(t)}{1 - R_k^2 g_k^{(o)}(t)^2} \quad (8.13a)$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1 + R_k}{1 - R_k} = \sqrt{\bar{k}^2 - 1}$$

となる。過減衰領域では  $R_k$  は (8.8) で与えられる。(8.13a) は、揺らぎ  $(\Delta \zeta_k)^2$  を散逸係数  $\gamma_k^{-1}$  と関係づける量子論的揺動散逸定理である。  $t \rightarrow 0$  で  $\langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle \rightarrow 1$  を考慮し (4.10) の  $\gamma_k \delta_k^{(o)} = (4m\kappa / \gamma) \bar{k} \sqrt{\bar{k}^2 - 1}$  を使うと

$$(\Delta\zeta_k)^2 = \frac{\hbar\gamma}{4m\kappa} \frac{1}{\bar{k}} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{m\kappa} |\mathbf{k}|} \quad (8.13b)$$

となる。最右辺は  $\gamma$  に依存せず、弾性係数を  $\kappa\mathbf{k}^2$  としたときの調和振動子の量子揺らぎと一致する。

同様に、運動量の揺らぎは、相関関数

$$F_k^{(o)}(t) = \begin{cases} 1 / (\gamma_k \delta_k^{(o)} \hbar) \langle \mathbf{o}; t | \Pi_{-k}(t) \Pi_k(0) | \mathbf{o}; 0 \rangle \langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle^{-1}, & t > 0 \\ 1 / (\gamma_k \delta_k^{(o)} \hbar) \langle \mathbf{o}; 0 | \Pi_{-k}(0) \Pi_k(t) | \mathbf{o}; t \rangle \langle \mathbf{o}; 0 | \mathbf{o}; t \rangle^{-1}, & t < 0 \end{cases} \quad (8.14)$$

から求めることができる。  $\Pi_{1,k}$  と  $\Pi_{2,k}$  に対する (5.4b) の表式を用いると、運動量は

$$\Pi_k(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\hbar\gamma_k \delta_k} (\tilde{\alpha}_k(t) + \alpha_{-k}(t)) \quad (8.15)$$

で与えられることが分かる。運動量の自己相関関数は  $t > 0$  の場合に (8.15) を代入すると

$$\begin{aligned} F_k^{(o)}(t > 0) &\equiv \frac{1}{\hbar\gamma_k \delta_k^{(o)} \langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle} (\Delta\Pi_k)^2 = \frac{1}{4} \frac{(1-R_k)^2 g_k^{(o)}(t)}{1-R_k^2 g_k^{(o)}(t)^2} \\ &\xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{4} \frac{1-R_k}{1+R_k} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\bar{k}^2 - 1}} \end{aligned} \quad (8.16a)$$

または

$$(\Delta\Pi_k)^2 = \hbar \frac{m\kappa}{\gamma} \bar{k} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{m\kappa} |\mathbf{k}| \quad (8.16b)$$

(8.13b) と (8.16b) より

$$\Delta\zeta_k \cdot \Delta\Pi_k = \frac{\hbar}{2} \quad (8.17)$$

となり、Heisenberg の不確定性関係は成立している。ついでに、座標と運動量の相関を求めておくと、(8.5)、(8.15)、(8.7) より

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{o}; t | \Pi_k(t) \zeta_k(0) | \mathbf{o}; 0 \rangle &= \frac{i\hbar}{2} \langle \mathbf{o}; t | (\tilde{\alpha}_k(t) \alpha_k(0) - \tilde{\alpha}_k(t) \tilde{\alpha}_{-k}(0) + \alpha_{-k}(t) \alpha_k(0) - \alpha_{-k}(t) \tilde{\alpha}_{-k}(0)) | \mathbf{o}; 0 \rangle \\ &= \frac{i\hbar}{2} \langle \mathbf{o}; t | \mathbf{o}; 0 \rangle \left( \frac{R_k^2 g_k(t)}{1-R_k^2 g_k(t)^2} - \frac{g_k(t)}{1-R_k^2 g_k(t)^2} \right) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow 0} -\frac{i\hbar}{2} \\ \langle \mathbf{o}; t | \zeta_k(t) \Pi_k(0) | \mathbf{o}; 0 \rangle &= -\langle \mathbf{o}; t | \Pi_k(t) \zeta_k(0) | \mathbf{o}; 0 \rangle \\ \langle \mathbf{o}; t | \Pi_{-k}(t) \zeta_k(0) | \mathbf{o}; 0 \rangle &= \langle \mathbf{o}; t | \zeta_k(t) \Pi_{-k}(0) | \mathbf{o}; 0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

$|\Delta\zeta_k|$  は  $\bar{k}^{-1/2}$  に比例し、 $|\Delta\Pi_k|$  は  $\bar{k}^{1/2}$  に比例する。 $\bar{k}$  が 1 から  $\infty$  まで変化する間に、 $|\Delta\zeta_k|$  は  $(\hbar\gamma/(4m\kappa))^{1/2}$  から 0 まで、 $|\Delta\Pi_k|$  は  $(\hbar\gamma/(m\kappa))^{-1/2}$  から無限大まで単調に変化する。

1つの変数の不確定性の程度は、不確定性関係を保ちつつ波数に応じて有限値から0または無限大まで変化するので、基底状態は広義のいわゆるスクイーズド状態—squeezed state 圧搾状態—となる<sup>8</sup>。

過少減衰領域では、 $R_k$ として(8.10)を用いると

$$\frac{1+R_k}{1-R_k} = \sqrt{1-\bar{k}^2}$$

となるので、 $\gamma_k \delta_k^{(u)}$ として(5.2b)を用い $0 < \bar{k} < 1$ とすれば、議論は過減衰領域の場合と全く同様である。すなわち、 $|\Delta\zeta_k|$ は $\bar{k}^{-1/2}$ に比例し、 $|\Delta\Pi_k|$ は $\bar{k}^{1/2}$ に比例する。 $\bar{k}$ が0から1まで変化する間に、 $|\Delta\zeta_k|$ は無窮大から $(\hbar\gamma/(4m\kappa))^{1/2}$ まで、 $|\Delta\Pi_k|$ は0から $(\hbar\gamma/(m\kappa))^{-1/2}$ まで単調に変化する。

(8.13b)と(8.16b)より、 $\bar{k}$ を変えることで、 $\Delta\zeta_k$ と $\Delta\Pi_k$ の大きさを変えることができることがわかる。位置(運動量)の不確定性は $\bar{k}$ が大きいほど小さい(大きい)。

## 9. まとめ

本稿で、もともとは粒子の散逸運動を記述するために工夫されたBateman系を量子化したときに、その特性がどのような観測事実となって現れるかを研究のテーマとした。その目的のためには、もとのBateman系を現実の物理系と対応する連続体のBateman系に拡張することが最適で、それは粘弾性体の性質を持つ。この場合、ある1つのモデル内での波数ベクトルは、それを定めることによって過少減衰および過減衰領域を見るパラメータとして使うことができる。我々は、変数をBose場として量子化する際に、質点力学系としてのBateman系の量子化手順に従った(Takahashi 2018a, 2018b)。減衰運動の量子化により、ハミルトニアン固有値の2つの分岐に対応して2種のBose粒子— $a$ 粒子 = 散逸子—が現れた。

2つの分岐が交差する臨界点が存在し、それは波動関数の特異点でもある。Berryの定理によれば、分岐の交差は幾何学的位相と関係している(Berry 1984)。我々は、1次元Bateman系について、波動関数の特異点を避けるようなパラメータ空間内の経路積分を行うことによってこのことを確かめた。2, 3次元では幾何学的位相は $2\pi$ の整数倍で、意味のある物理的効果は生じない。

Bateman系では、エネルギーを正準の手続きで定めることはできない。我々は、エネルギー演算子を古典力学との対応関係をもとにつくり、対角化によってさらにエネルギーの最低状

<sup>8</sup> スクイーズド状態は、特に量子光学で重要な概念である。そこでは本稿とは異なった定義が用いられるが、ある変数の不確定性を増すことで他の変数の不確定性を抑えることができるという点は共通である。

態である並進対称な基底状態を構成した。エネルギー演算子の対角化は、 $\alpha$  粒子を生成消滅する演算子の適当な線形結合— $\alpha$  演算子—を採用することで可能になる。したがって、基底状態は  $\alpha$  粒子の凝縮状態となる。Heisenberg の不確定性関係は時間に依存しない形で満たされるが、位置と運動量それぞれの量子揺らぎは 0 から無限大までの値が許され、一方を大きくすることで他方を小さくできる。よって、Bateman 系の基底状態はいわゆるスクイーズド状態である。凝縮は波数が大きいときに顕著になるので、これは粘弾性体の細かい塑性変形を表すと考えられる。

Bateman 系の最大の特徴は、それが散逸系でありながら系の時間発展を生成するハミルトニアンを有するモデル族に属するという点である。その結果、1 次元連続体では非自明な幾何学的位相が生じることが示された。これは、実験的には光学的フォノンの干渉現象として観測されるはずである。Bateman 系の物理的妥当性はこの点の検証によって判断されるだろう。

#### 参考文献

- Bateman H, 1931 "On dissipative systems and related variational principles" *Phys. Rev.* **38**, 815-819.
- Berry M V, 1984 "Quantal phase factors for accompanying adiabatic changes" *Proc. R. Soc. Lond. A* **392**, 45-57.
- Berry M V, 1987 "Interpreting the anholonomy of coiled light" *Nature* **326**, 277-278.
- Bjorken J D and Drell S D, 1965 *Relativistic quantum fields* (McGraw-Hill) p 20.
- Blasone M and Jizba P, 2004 "Bateman's dual system revisited: quantization, geometric phase and relation with the ground-state energy of the linear harmonic oscillator" *Ann. Phys.* **312**, 354-397.
- Celeghini E, Rasetti M and Vitiello G, 1992 "Quantum dissipation," *Ann. Phys.* **215**, 156-170.
- Christensen R M, 1982 *Theory of viscoelasticity* (Academic Press, New York) Chap. 1.
- Dedene G, 1980 "Oscillators and complex Hamiltonian calculus," *Phys. A* **103**, 371-378.
- Feshbach H and Tikochinsky Y, 1977 "Quantization of the damped harmonic oscillator," *N. Y. Acad. Sci.* **38**, 44-53.
- Ford G W, Kac M and Mazur P, 1965 "Statistical mechanics of assemblies of coupled oscillators," *J. Math. Phys.* **6**, 504-515.
- Ford G W, Lewis J T and O'Connell R F, 1988 "Quantum Langevin equation" *Phys. Rev. A* **37**, 4419-4428.
- Hasse R W, 1975 "On the quantum mechanical treatment of dissipative systems" *J. Math. Phys.* **16**, 2005-2011.
- Keizer J, 1987 *Statistical thermodynamics of nonequilibrium processes* (Springer, New York), Chap. 4.
- Kostin M D, 1972 "On the Schrödinger-Langevin equation" *J. Chem. Phys.* **57**, 3589-3591.
- Longuet-Higgins H C, 1975 "The intersection of potential energy surfaces in polyatomic molecules" *Proc. R. Soc. Lond. A* **344**, 147-156.
- Merkt F S, Deegan R D, Goldman D I, Rericha E C and Swinney H L "Persistent holes in a fluid" *Phys. Rev. Letters* **92**, 184501.
- Osswald T A and Rudolph N, 2014 *Polymer rheology: Fundamentals and applications* (Hanser Pub.,

- Munich). Partly available from [https://www.hanserpublications.com/SampleChapters/9781569905173\\_9781569905173%20Polymer%20Rheology%20sample%20pages.pdf](https://www.hanserpublications.com/SampleChapters/9781569905173_9781569905173%20Polymer%20Rheology%20sample%20pages.pdf).
- Pancharatnam S, 1956 "Generalized theory of interference, and its applications Part I Coherent pencils," *Proc. Ind. Acad. Sci* **XLIV** A, 247-252.
- Takahashi K, 2017 "Can the diffusion be quantized?," *J. Human Info. (Tohoku Gakuin Univ.)* **22**, 21-27.
- Takahashi K, 2018a "On the quantization of the massless Bateman system," *J. Math. Phys.* **59**, 032103.
- Takahashi K, 2018b "On the quantization of the massive Bateman system," *J. Math. Phys.* **59**, 072108.
- Takahashi K, 2018c "Quantum theory of the Bateman system," presented to *World Quantum Phys. Cong. 2018 (VBRI Press)*, Stockholm.
- Takahashi K, 2019 "On the quantization of the Bateman system of a continuum," *J. Phys. Com.* **2**, 035005.
- キッテル [Kittel C] 1972 『固体の量子論』(堂山訳, 丸善), 第2章.
- 高橋光一 [Takahashi K] 2019 『散逸系の量子論』東北学院大学教養学部論集 **182**, pp 99-136.
- 
- Lib. Arts Rev. (Tohoku Gakuin Univ.)* 2019, **184** 35-65.